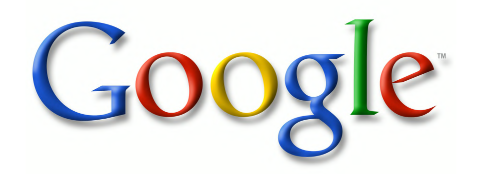




1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Beiträge zur Interpretation

der

partiellen Differentialgleichungen

mit drei Variabeln

von

Paul du Bois-Reymond.

Erstes Heft:

Die Theorie der Charakteristiken.

Leipzig, 1864.

Verlag von Johann Ambrosius Barth.

SEINEM LIEBEN VATER

FELIX HENRI DU BOIS-REYMOND

GEWIDMET.

Vorrede.

Ich machte vor einiger Zeit die Bemerkung, dass zuweilen Grenzbedingungen, wie sie sonst der Form und dem Inhalt nach genügen, um das Integral einer partiellen Differentialgleichung zu bestimmen, es gleichwohl vollkommen unbestimmt lassen.

In der mathematischen Literatur suchte ich vergeblich nach einer Erklärung oder auch nur einer Erwähnung dieser eigenthümlichen Erscheinung.

Ich sah mich daher auf eigenes Nachdenken angewiesen, und verstand sie bald bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, auch gelang es mir, sie bei denen höherer Ordnung auf allgemeine Gesetze zurückzuführen. Allein gerade hier stellte sich die innigste Beziehung heraus zwischen der angedeuteten Frage und dem Fundamentalproblem der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, nämlich diesem: in welcher Art die Integrale ihre willkürlichen Bestandtheile enthalten. So wurde das nahe Ziel, welches ich mir bei der Untersuchung gesteckt, durch neue immer entferntere, nunmehr vielleicht unerreichbare ersetzt, ja die Richtung der Untersuchung verschob sich dergestalt, dass manches eine grosse Wichtigkeit gewann, was früher als unwesentlich erschien, und anfänglich mit Vorliebe Durchforschtes als bedeutungslos verworfen wurde.

Das vorliegende Heft enthält unter dem Titel »Die Theorie der Charakteristiken« eine erste Mittheilung aus meinen Untersuchungen. Man wird darin die Interpretation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und ihrer Integrale, so

wie allgemeine Lehrsätze über die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung finden.

Um den Leser mit meinem Standpunkt bekannt zu machen, folgt hier eine kurze Darstellung der leitenden Gedanken und der Ergebnisse des gegenwärtigen Hefts.

Betrachten wir das Problem der bestimmten Integration gewöhnlicher sowohl wie partieller Differentialgleichungen. Man pflegt dieses Problem als ein doppeltes anzusehen. Es handelt sich darum, erstens die primitive Gleichung (im Sinne von Lagrange) zu finden, und zweitens sind deren willkürliche Bestandtheile gemäss den neben den Differentialgleichungen gegebenen Bedingungen: Anfangszuständen, Grenzbedingungen, u. s. f. zu bestimmen.

Bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen tritt an Schwierigkeit und Wichtigkeit der zweite Theil des Problems gegen den ersten beträchtlich zurück. Die Integrale dieser Differentialgleichungen sind entweder durch die bekannten analytischen Funktionen in endlicher Form ausdrückbar — was der seltenere Fall ist — oder die Differentialgleichungen dienen zur Definition neuer analytischer Abhängigkeiten, und dann handelt es sich hauptsächlich um deren präcise Definition und Klassifikation, mit einem Wort, hier handelt es sich um die Hauptaufgabe der Integralrechnung. Dagegen sind die willkürlichen Elemente des Integrals lediglich in der primitiven Gleichung enthaltene Parameter, welche in der Regel vermöge einer Eliminationsrechnung ihre Bestimmung finden.

Ganz anders verhält es sich mit den partiellen Differentialgleichungen.

Zwar bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln läuft der zweite Theil des Integrationsproblems im Allgemeinen ebenfalls auf eine Elimination hinaus. Auch ist keine Verallgemeinerung der bei der Betrachtung dieser Gleichungen gewonnenen Resultate auf die partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung möglich. Das Problem, beide Klassen von Gleichungen zu integriren, ist vielmehr ein prinzipiell verschiedenes. So glaube ich denn auch, dass von den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung an die bezeichnete Spaltung des Integrationsproblems

überhaupt kaum mehr zulässig ist, wenigstens nicht ohne dass gewisse vorbereitende Untersuchungen angestellt würden, die, selbst sehr schwieriger Natur, eine solche Spaltung erst ermöglichen müssen.

Wenn man sich unter dem allgemeinen Integral den »analytischen Ort« sämmtlicher partikulären Integrale vorstellt, so bin ich der Ansicht, dass ein solcher, allgemein zu reden, nicht existirt. Allerdings lassen stets allgemeine Integrale zu unter andern die reinlineären Differentialgleichungen, d. h. diejenigen, welche in Bezug auf die abhängige Variabele und deren Differentialquotienten lineär zusammengesetzt sind. Dagegen giebt es ganze Familien von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zwei coordinirte Klassen von Integralen mit sehr umfassender Form haben, aber von solcher Beschaffenheit, dass die Integrale der einen Klasse nicht in der anderen Klasse enthalten sind, und dass keine Form des Integrals denkbar ist, die beide Klassen umfasste. Wenn nun die partikularen Integrale einer partiellen Differentialgleichung je nach der Form dieser Gleichung mehr oder weniger auf einander nicht zurückführbare analytische Oerter haben, so ist die Aufgabe, eine partielle Differentialgleichung unabhängig von jeder Grenzbedingung allgemein aufzulösen, mindestens ein *problema indeterminatum* im Sinne der alten Mathematiker (als ob man z. B. »die Wurzel« einer Gleichung dritten Grades verlangte), wenn sie nicht gar ein *problema absurdum* ist. Denn es wäre, scheint es mir, vollends sinnlos, alle diese Oerter aufsuchen zu wollen, bevor man über ihre Zahl, den Umfang der einzelnen und allerlei andere Dinge nicht vollkommen unterrichtet ist.

Was dann den zweiten Theil des Problems, den Uebergang vom unbestimmten zu einem bestimmten Integral betrifft, so ist die Ermittelung eines allgemeinen Integrals erfahrungsgemäss häufig die leichtere Aufgabe, während jener Uebergang sehr erhebliche Schwierigkeiten darbietet. Und ist er für eine Klasse von Grenzbedingungen geleistet, so braucht er es deshalb noch für keine andere zu sein. Uebrigens erfüllt ein allgemeines Integral immer von selbst eine bestimmte Klasse von Grenzbedingungen; und gesetzt nun, man hätte die Beschaffenheit dieser Klasse erkannt, so wäre nunmehr das Problem der Ueberführung eines bestimmten Integrals in ein anderes

zu behandeln, welches zwar in gewissen Fällen nicht schwer ist, im Allgemeinen aber zu den unzugänglichsten der Analysis gehört, indem es auf gemischte Differenzengleichungen führt.

Das eben flüchtig Angedeutete, so wie manche andere Ueberlegungen haben in mir die Ueberzeugung begründet, dass es verlorene Mühe wäre, sich mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen noch ferner in dem Sinne derjenigen Mathematiker zu beschäftigen, welche nur nach Integralen mit willkürlichen Funktionen forschten, unbekümmert um deren geometrische Bedeutung.

Man ist vielmehr gezwungen, die partielle Differentialgleichung mit den Grenzbedingungen als ein Ganzes aufzufassen und darf beide in der Untersuchung nicht trennen. Nur auf diese Weise kann System in die Behandlung der partiellen Differentialgleichungen gebracht und die Form ihrer Integrale ans Licht gefördert werden.

Damit aber die Forschung nicht wieder in denselben unsicheren Weg lenke, ist es nöthig, die Grenzbedingungen in der Weise zu klassificiren, dass man eine Klasse, als die einfachste, zuerst der Untersuchung zu Grunde legen kann. Bei den partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln liegt eine solche Klassifikation sehr nahe, und soll hier für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegeben werden.

Die Grenzbedingungen überhaupt bestehen in neuen partiellen Differentialgleichungen zwischen den Variabeln und den Differentialquotienten der gegebenen partiellen Differentialgleichung, in denen die Argumente und die abhängige Variabele als durch gewisse Gleichungen verbunden gedacht sind. Wenigstens lassen sich die Grenzbedingungen immer in diese Form bringen.

In einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sei z die abhängige Variabele, x und y seien die Argumente und alle drei Variabeln denke man sich reell, so dass sie als die rechtwinkligen laufenden Coordinaten einer Oberfläche angesehen werden können, aus deren Gleichung die vorgelegte Differentialgleichung durch Differentiation und Elimination hervorgeht. Diese Oberfläche mag »Integraloberfläche« heissen.

Die Integraloberfläche ist nun bestimmt erstens durch folgende Form der Grenzbedingung. Es wird verlangt, dass sie durch eine gegebene räumliche Kurve gehen soll, und dass die Richtung ihrer Normale für jeden Punkt der Kurve eine gegebene sei. Weil hier die Grenzbedingung nur eine Kurve d. i. eine Folge von Punkten betrifft, heisse diese Form der Grenzbedingungen einläufig. Auf jene Normalform der einläufigen Grenzbedingung ist unter andern der Fall zurückführbar, wo längs einer Kurve eine Gleichung zwischen den Variabeln und den partiellen Differentialquotienten von z bis zu einer beliebigen Ordnung gegeben ist. Nur ist dann eine gewöhnliche Differentialgleichung aufzulösen, um die Richtung der Normale als Funktion der Coordinaten ihres Fusspunkts auf der Kurve zu finden.

Ferner besteht die zweiläufige Grenzbedingung der Integraloberfläche darin, dass man von ihr verlangt, sie solle zwei gegebene räumliche Kurven enthalten, oder längs zweier Kurven gegebene Bedingungen erfüllen.

Ausser den oben angeführten Grenzbedingungen lassen die Differentialgleichungen noch andere zu, die eine Klasse für sich bilden, mit der vorläufig wenig zu machen sein wird: wenn nämlich die Integraloberflächen mehrerer Differentialgleichungen oder mehrere Integraloberflächen einer Differentialgleichung gemeinsame Grenzbedingungen zu erfüllen haben, wie dies in physikalischen Theorien (z. B. in der Theorie der Capillarität) vorkömmt.

Wenn wir nun eine solche Form der Gleichung der Integraloberfläche, welche die auf die einläufigen oder zweiläufigen Grenzbedingungen bezüglichen Grössen als unbestimmte Funktionszeichen enthält, festgestellt haben, so hat es einen Sinn, diese Form ein einläufiges oder zweiläufiges allgemeines Integral zu nennen, und es ist daher ein *problema determinatum* nach der Zusammensetzung z. B. des einläufigen allgemeinen Integrals der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu forschen.

Indem ich mich mit dieser Aufgabe beschäftigte, wurde es freilich nöthig, sie noch mehr einzuschränken, indem für's Erste nur solche partielle Differentialgleichungen in Betrachtung gezogen werden konnten, bei denen die Grösse

$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - 4\,\frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{\partial F}{\partial t}$ wesentlich positiv ist. [$F=0$ ist die partielle Differentialgleichung und r, s, t bedeuten die zweiten Differentialquotienten von z nach xx, xy, yy.] Die Gründe dafür findet man im vorliegenden Hefte.

Unter der erwähnten Einschränkung enthält der letzte Abschnitt dieses Hefts gewisse Betrachtungen, die man als erste Annäherung zur Entdeckung der Form des allgemeinen einläufigen Integrals ansehen darf: ich meine die dort entwickelten Grundzüge der Lehre von den »spontanen Grenzen« der Integraloberfläche, d. i. der Grenzen bis zu welchen ein, durch ein endliches Stück einläufiger Grenze, bestimmtes endliches Stück Integraloberfläche sich erstreckt. Die sonstigen im letzten Abschnitt mitgetheilten Sätze über die Charakteristiken sind nothwendiges Material zu dieser und zur ferneren Untersuchung.

Zur Literatur des Gegenstandes bemerke ich, dass, wo es von Interesse sein konnte, die einschlägigen Abhandlungen citirt wurden. Es sind dies hauptsächlich ältere französische. Der erste Mathematiker, welcher mit Bewusstsein den richtigen Weg betrat, ist Fourier, doch seine denkwürdigen Theorien liegen, weil nur lineare Gleichungen betreffend, abseits meiner Untersuchung. Dagegen hat uns kürzlich Riemann die Schalldifferentialgleichung einläufig allgemein integriren gelehrt, und es beruht seine Methode auf einem Gedanken, den ich als einen wahrhaft bahnbrechenden Schritt in der bezeichneten Richtung erachte. Zum Gegenstande des vorliegenden Hefts steht er in der innigsten Beziehung, und ist daher gebührend berücksichtigt worden.

Partielle Differentialgleichungen mit mehr als drei Variabeln habe ich, weil unzugänglich der bezeichneten Art geometrischer Interpretation, nicht in das Bereich der Betrachtung gezogen. Indessen ist, angesichts der schönen Untersuchungen Carl Neumann's über die Differentialgleichung der Wärmevertheilung, die Hoffnung berechtigt, dass überhaupt die in Bezug auf partielle Differentialgleichungen mit drei Variabeln gewonnenen Resultate einen Wink für die Behandlung solcher mit vier Variabeln geben werden.

Die Methode der Untersuchung ist im Allgemeinen die synthetisch-geometrische. Ich bin bestrebt, auf Grund einer geeigneten Interpretation der Differentialgleichung deren Integraloberflächen zu construiren. Eine gewöhnliche Differentialgleichung kann als eine partielle angesehen werden, der die partiellen Differentialquotienten nach der dritten Variabeln fehlen. Die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich durch Kurven in der Ebene vorstellen. Ist die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, so enthält sie eine Bestimmung für die Lage der Normale der jeden Punkt der Ebene passirenden Integralkurve, sie liefert die Richtung der Normale als Funktion der Coordinaten ihres Fusspunkts. So ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Relation zwischen den Coordinaten eines Punkts, der Richtung der Normale und der Länge des Krümmungshalbmessers einer jenen Punkt passirenden Integralkurve der Differentialgleichung, u. s. f.

Ganz ähnlich ist die Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Relation zwischen den Coordinaten eines Punkts $\mathfrak{P}$ im Raume und den Grössen, von denen die Richtung der Normale an eine den Punkt $\mathfrak{P}$ passirende Integraloberfläche abhängt, die Normale in diesem Punkt errichtet gedacht. Die Normale kann dann ein Strahl einer gewissen Kegelfläche sein, deren Spitze der Punkt $\mathfrak{P}$ ist. Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung endlich ist eine Relation zwischen Richtung der Normale, Lage und Grösse der Hauptkrümmungen für einen Punkt einer Integraloberfläche und den Coordinaten dieses Punkts. Die Coordinaten des Punkts betragen drei Grössen, die Richtung der Normale hängt von zwei Grössen ab, Lage und Grösse der Hauptkrümmungen hängen, die Richtung der Normale als bekannt vorausgesetzt, von drei Grössen ab, und acht Grössen enthält auch eine solche Differentialgleichung in ihrer allgemeinsten Form.

Die Construction der Integraloberflächen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung habe ich auf Grund der eben mitgetheilten Interpretation im gegenwärtigen Hefte vollständig gegeben. Dagegen gelange ich hier noch nicht bis zur Anwendung der Interpretation der partiellen Differentialglei-

chung zweiter Ordnung. Hinsichtlich der Construction von Oberflächen kann ich behaupten, dass man in diesem Hefte deren streng richtige wird kennen lernen, nämlich solche, die wirklich gegen eine stetige Oberfläche convergiren, wenn die zur Construction benutzten Elemente verschwinden, was von den mir bisher bekannt gewordenen Constructionen nicht behauptet werden kann.

Die Darstellung folgt genau dem Weg, den die Untersuchung eingeschlagen. Lehrsätze werden nicht hingestellt und dann bewiesen, sondern sie werden entwickelt.

Da die Betrachtungen grösstentheils geometrische sind, die zuweilen der Vorstellung etwas schwer fallen mögen, so wird der Leser ersucht, sich selbst die nöthigen Figuren dazu zu zeichnen. Der Verfasser hat es vorgezogen, keine Figuren dem Werke beizufügen, weil man sich, wie ihm scheint, in Raumvorstellungen nach einer deutlichen Beschreibung besser zu orientiren pflegt, als nach einer Zeichnung. Denn in der Raumvorstellung der Einzelnen obwaltet eine so grosse Verschiedenheit, dass die fremde Zeichnung selten die beim Lesen in uns keimende Anschauung deckt, dagegen sie leicht verwirrt.

Bei der Länge der Untersuchung, deren vielfach wechselnden Richtung und der Entfernung meines Wohnsitzes vom Druckorte, konnte es nicht ausbleiben, dass sich einige Unrichtigkeiten in die Darstellung einschlichen. Allein sie betreffen nur Beiläufiges und sind theils nicht der Erwähnung werth, theils werde ich sie an einem späteren Orte berichtigen. Hier anzuführen ist nur, dass die Betrachtung des §. 22 allgemeiner Gültigkeit entbehrt.

Berlin, im April 1864.

Der Verfasser.

Inhalts-Uebersicht.

Erster Abschnitt.
Ueber die Construction der Differentialgleichungen mit drei Variabeln.

Zweiter Abschnitt.

Die Construction der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Dritter Abschnitt.

Interpretation des Integrals der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Vierter Abschnitt.

Ueber die Construction der Integraloberflächen aus Flächenelementen.

*) Durch ein typographisches Versehen ist im Texte die Zahl des vorhergehenden Paragraphen wiederholt, und erstreckt sich dessen Einwirkung auch auf die nachfolgenden Paragraphen. Es möge daher dieser Paragraph als §. 75a unterschieden werden.

Fünfter Abschnitt.

Ueber die Grenzbedingungen bei den partiellen Differentialgleichungen und das Gebiet, innerhalb dessen ihre Integrale durch die willkürlichen Funktionen bestimmt sind.

Beiträge zur Interpretation

der

partiellen Differentialgleichungen

mit drei Variabeln.

Erster Abschnitt.

Ueber die Construction der Differentialgleichungen mit drei Variabeln.

I. Vorbemerkungen.

§. 1.

Ueber totale Differentialgleichungen, die der Bedingung der Integrabilität genügen.

Wird aus einer Gleichung $f(x, y, z, \alpha) = 0$ und ihren beiden partiellen Derivirten nach x und nach y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ein Parameter α eliminirt, so erhält man zwei Gleichungen:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$
$$F_1(x, y, z, p, q) = 0,$$

mit Hülfe deren man p und q als Functionen von x, y, z bestimmen kann. Es sei:

$$p = \varphi(x, y, z)$$
$$q = \varphi_1(x, y, z)$$

dann genügt die totale Differentialgleichung:

$$dz = \varphi dx + \varphi_1 dy$$

der Bedingung der Integrabilität.

Um diese Differentialgleichung zu integriren, d. h. um daraus die Gleichung $f = 0$ zurückzuerhalten, pflegt man so zu verfahren, dass man z. B. die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y, z)$ auflöst, indem man y als constant ansieht. Die Integrationsconstante, welche diese Auflösung einführt, kann

dann noch y enthalten. Diese Abhängigkeit wird bestimmt durch Einsetzen des Werthes von z, der die Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\ (x, y, z)$ erfüllt, in die Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_1\ (x, y, z)$. Bei diesem Verfahren kann man zwar mit einer Wahrscheinlichkeit $= {}^2/_3$ darauf rechnen, dass jene Integrationsconstante kein y mehr enthält, dass es also bei der ersten Integration sein Bewenden hat, allein es dürfte von Interesse sein, eine Methode kennen zu lernen, nach welcher man die Integration der Gleichung $dz = \varphi dx + \varphi_1 dy$ stets auf diejenige nur einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückführen kann.

Ihr Integral $f = 0$, da es nur eine willkürliche, d. h. nicht in der Differentialgleichung vorkommende Constante enthält, ist die Gleichung einer einfachen Oberflächenschaar und dx, dy, dz sind die Projectionen des Elementes einer Kurve in einer dieser Oberflächen auf die Coordinatenaxen. Um jede überflüssige Allgemeinheit zu vermeiden, legen wir durch die z Axe eine Ebene, deren Gleichung sein wird:

$$y = ax.$$

Eliminiren wir nun aus den Gleichungen

$$dz = \varphi dx + \varphi_1 dy,$$
$$y = ax,$$
$$dy = adx$$

die Grössen y und dy, wodurch man erhält:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi\ (x, ax, z) + a\ \varphi_1\ (x, ax, z),$$

so ist dies die gewöhnliche Differentialgleichung der Schaar der Schnittkurven der Ebene $y = ax$ mit der Oberflächenschaar $f = 0$. Ihr Integral sei:

$$c = \psi\ (x, z, a),$$

so ist c eine Function von a, die man bestimmt, indem man die Variabeln auf die z Axe bezieht, wo $x = 0$ ist, und $z = z_0$ sein mag. Dann ist

$$\psi\ (0, z_0\ a) = \psi\ (x, z, a)$$

und wenn man nun $\frac{y}{x}$ für a zurücksetzt:

$$\psi\ (0, z_0, \frac{y}{x}) = \psi\ (x, z, \frac{y}{x}),$$

so ist dies das gesuchte Integral der Gleichung $dz = \varphi dx + \varphi_1 dy$.

Diese Methode wird unbrauchbar, wenn die Individuen der

Oberflächenschaar $f = 0$ sich in der Weise berühren, dass sie alle denselben Punkt der z Axe schneiden, wie dies u. a. der Fall ist, wenn z_0 unendlich wird. Dann hat man für y und dy z. B. ihre aus der Gleichung:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

gezogenen Werthe zu setzen, wo x_0 und y_0 die Coordinaten eines Punktes bedeuten, für welchen jener Umstand nicht eintritt. Ist nun

$$c = \psi(x, z, a, x_0, y_0)$$

das Integral der Differentialgleichung:

$$dz = dx\,\varphi[x, y_0 + a(x - x_0), z] + a\,dx\,\varphi_1[x, y_0 + a(x - x_0), z],$$

so bestimmt sich die Constante folgendermassen:

$$\psi(x_0, z_0, a, x_0, y_0) = \psi(x, z, a, x_0, y_0)$$

und dieses Integral lässt sich, wenn man für a seinen Werth $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ zurücksetzt, stets auf die Form:

$$\psi_1(x_0, y_0, z_0) = \psi_1(x, y, z)$$

bringen.

Erstes Beispiel. Es sei die Gleichung

$$\alpha = \frac{z + \beta x + \gamma y + \delta}{z + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1}$$

vorgelegt. Differenzirt man sie, so folgt:

$$\begin{aligned} 0 = & dz\{x(\beta_1 - \beta) + y(\gamma_1 - \gamma) + \delta_1 - \delta\} \\ & + dx\{z(\beta - \beta_1) + y(\beta\gamma_1) + (\beta\delta_1)\} \\ & + dy\{z(\gamma - \gamma_1) - y(\beta\gamma_1) + (\gamma\delta_1)\}^{*)}, \end{aligned}$$

welche Gleichung wir nach der oben angegebenen Methode integriren wollen. Setzen wir ax und adx statt y und dy, so erhalten wir:

$$dz\left\{x + \frac{\delta_1 - \delta}{\beta_1 - \beta + a(\gamma_1 - \gamma)}\right\} = dx\left\{z - \frac{(\beta\delta_1) + a(\gamma\delta_1)}{\beta_1 - \beta + a(\gamma_1 - \gamma)}\right\}$$

und diese Gleichung giebt integrirt:

$$\frac{z[\beta_1 - \beta + a(\gamma_1 - \gamma)] - (\beta\delta_1) - a(\gamma\delta_1)}{x[\beta_1 - \beta + a(\gamma_1 - \gamma)] + \delta - \delta_1} = c$$

wo c die Integrationsconstante vorstellt. Nun haben wir $x = 0$ und z_0 statt z zu setzen, um c zu bestimmen. Es wird dann:

*) Ich werde in dieser Abhandlung stets Determinanten von der Form: $a_1 b_2 - a_2 b_1$ oder $\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi_1}{dx}$, u. a. m., wenn man die Form des Subtrahend aus der Form des Minuend ohne Weiteres ersieht, der Kürze wegen so schreiben: $(a_1 b_2)$, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dy}\right)$, etc.

$$c = \frac{1}{\delta_1 - \delta}\left\{ z_0 \left[\beta_1 - \beta + a(\gamma_1 - \gamma)\right] - (\beta\delta_1) - a(\gamma\delta_1) \right\}$$

Diesen Werth von c in das eben gefundene Integral eingeführt; statt a gesetzt $\frac{y}{x}$; z_0 bestimmt, und auf die linke Seite der Gleichung gebracht, die rechte aber gehörig reducirt; folgt:

$$z_0 = \frac{z(\delta_1 - \delta) + \delta_1(\beta x + \gamma y) - \delta(\beta_1 x + \gamma_1 y)}{(\beta_1 - \beta)x + (\gamma_1 - \gamma)y + \delta_1 - \delta}.$$

Wenn man in der Gleichung $\alpha =$ etc., von der wir ausgingen, die Constante α dadurch bestimmt, dass man $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$ setzt, so erhält man $\alpha = \frac{z_0 + \delta}{z_0 + \delta_1}$, und wenn nun der Werth von z_0 aus der Gleichung:

$$(z_0 + \delta)(z + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1) = (z_0 + \delta_1)(z + \beta x + \gamma y + \delta)$$

hergeleitet wird, so erweiset er sich mit dem vorigen identisch.

Zweites Beispiel: für den Fall, wo von der allgemeineren Substitution $y - y_0 = a(x - x_0)$ Gebrauch gemacht werden muss. Es sei:

$$xyz = c.$$

Diese Gleichung giebt differenzirt:

$$yzdx + xzdy + xydz = 0$$

und wenn man substituirt:

$$zdx\{y_0 + 2ax + x_0\} + xdz\{y_0 + a(x - x_0)\} = 0.$$

Diese Gleichung hat zum Integral:

$$x\{y_0 + a(x - x_0)\}z = c.$$

Bestimmt man nun die Constante, indem man x_0 statt x, z_0 statt z schreibt, so folgt $c = x_0 y_0 z_0$, und das Integral erhält, wenn y für $y_0 + a(x - x_0)$ gesetzt wird, die Form:

$$xyz = x_0 y_0 z_0.$$

Bemerkung. Statt als Hülfsgleichung die Gleichung $y - y_0 = a(x - x_0)$ einer Ebene zu nehmen, kann man die Gleichung irgend einer Oberflächenschaar benutzen, die bei Variation eines Parameters eine gegebene Kurve nicht verlässt; man kann auch leicht nach ähnlichen Principien andere Methoden ersinnen, die zum Integral der totalen Differentialgleichung führen, z. B. indem man zur Hülfsgleichung irgend eine Gleichung zwischen x, y, z und zwei Parametern wählt. Endlich lässt sich die hier gegebene Methode auf Gleichungen mit beliebig vielen Variabeln ausdehnen, wobei dann immer nur eine Differentialgleichung aufzulösen ist.

Auf den letzteren Punkt, der uns hier zu weit führen würde, werde ich an einem anderen Orte eingehen. Ich werde nur zeigen, wie man eine Gleichung:

$$dU \equiv Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

(X, Y, Z sind Funktionen von x, y, z, welche die Integrabilitätsbedingung erfüllen) mit Hülfe irgend einer Gleichung:

$$V \equiv \lambda(x, y, z, a, b) = 0$$

und ihrer Derivirten

$$dV \equiv X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz$$

wo a und b zwei willkürliche Parameter bedeuten, integriren kann. Eliminirt man aus den Gleichungen: $dU = 0$, $V = 0$, $dV = 0$ irgend eine von den Variabeln x, y, z und deren Differential, integrirt die resultirende gewöhnliche Differentialgleichung, so folgt eine Gleichung:

$$c = W(x, y, z, a, b),$$

wo ich deshalb die drei Variabeln x, y, z geschrieben habe, weil es unbestimmt gelassen ist, welche von ihnen eliminirt werden sollte. Die Gleichungen $c = W$ und $V = 0$ sind diejenigen der Durchschnittslinien der Oberflächen V mit den Oberflächen, deren Differentialgleichung $dU = 0$ ist. Nimmt man nun zwischen a und b eine solche Abhängigkeit an, dass die Oberfläche $V = 0$ bei Variation dieser Parameter immer durch den Punkt x_0, y_0, z_0 geht, d. h. setzt man:

$$V_0 \equiv \lambda(x_0, y_0, z_0, a, b) = 0$$

und lässt auch die Kurve $c = W$ durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gehen, indem man setzt:

$$c = W(x_0, y_0, z_0, a, b) \equiv W_0,$$

so kann man aus den Gleichungen:

$$V = 0, \ V_0 = 0, \ W - W_0 = 0$$

die Parameter a und b eliminiren, und die resultirende Gleichung muss auf die Form:

$$U - U_0 = 0$$

gebracht werden können, wo $U = f(x, y, z)$, $U_0 = f(x_0, y_0, z_0)$ und

$$dU \equiv Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

die Differentialgleichung, von der wir ausgingen, ist. Die oben gegebene Integrationsmethode kann als eine Specialisirung der eben mitgetheilten angesehen werden, denn setzt man

$V \equiv y - ax + b = 0$, $V_0 \equiv y_0 - ax_0 + b = 0$, so ergiebt die Elimination von b die von uns angewendete Substitution $y - y_0 = a(x - x_0)$.

§. 2.

Ueber die verschiedenen Integrale der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln.

Durch Elimination zweier Parameter aus den Gleichungen

$$f \equiv f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

erhält man die partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit drei Variabeln:

$$F \equiv F(x, y, z, p, q) = 0,$$

deren geometrische Interpretation der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung ist.

Die Gleichung $f = 0$ hat offenbar dieselbe Allgemeinheit wie die Gleichung $F = 0$, weil sie dieselbe Anzahl Variabeln hat, weshalb Lagrange mit Recht die Gleichung $f = 0$ das vollständige Integral der Gleichung $F = 0$ genannt hat.

Wenn man nun auch für jeden Punkt xyz durch Variation von α und β alle Werthe der p und q, welche die Gleichung $F = 0$ erfüllen, erhalten kann, so gestattet das Integral $f = 0$ doch noch eine Transformation, durch die es eine umfassendere geometrische Bedeutung erhält. Stellt man sich nämlich die Aufgabe, α und β so als Functionen von x und y zu bestimmen, dass p und q der Form nach unverändert bleiben, so findet man die Bedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0,$$

oder

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) = 0,$$

welcher Gleichung auf die allgemeinste Weise Genüge geschieht durch die Annahme $\beta = \varphi(\alpha)$, wo φ eine beliebige Function bedeutet. Lagrange hat daher das System der Gleichungen:

$$f = 0, \frac{df}{d\alpha} = 0$$

das allgemeine Integral genannt, wegen der darin enthaltenen willkürlichen Function, obschon es für einen Punkt xyz durchaus nicht mehr Werthe von p und q liefert, als das vollständige.

Den obigen Bedingungsgleichungen lässt sich nun noch auf verschiedene Weise genügen. Nimmt man z. B. an, α sei variabel und β constant und bestimmt α aus der Gleichung $\frac{df}{d\alpha} = 0$, oder man kehrt diese Rolle von α und β um, so werden die Bedingungsgleichungen auch erfüllt und man erhält ein Integral mit einer Constanten.*) Endlich kann man α und β aus den Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$ bestimmen. Von diesen verschiedenen Formen des Integrals, die den Charakter besonderer Auflösungen haben, ist wenig mehr wie ihre Existenz bekannt.

§. 3.

Ueber den Gang der Variabeln in den Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$.

Indem ich dazu übergehe, in allgemeinen Zügen den Gang der Variabeln in den Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ anzugeben, führe ich sofort die Beschränkung ein, dass x, y, z räumliche Coordinaten, d. h. stets reell seien. Es handelt sich also nur noch um die Werthe, welche p und q oder α und β für alle Punkte des Raumes annehmen können. Wir knüpfen die Untersuchung an die Gleichung $f = 0$.

Man denke sich x und y hätten die festen Werthe x_1, y_1 erhalten, und es möge z von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren. Dann ist $f(z, \alpha, \beta) = 0$ die Gleichung einer Oberfläche, so bald man die Grössen α und β die Rolle der x und y Coordinaten spielen lässt. Projicirt man diese Oberfläche auf die drei Coordinatenebenen, so werden ihre Projectionen im Allgemeinen die Coordinatenebenen nicht gänzlich bedecken, sondern Begrenzungen haben. Vergegenwärtigen wir uns die Bedeutung dieser Begrenzungen. Wenn man irgend eine Oberfläche $f(x, y, z) = 0$

*) Dieser Integrale mit einer Constanten ist meines Wissens in den Abhandlungen von Lagrange über diesen Gegenstand keine Erwähnung geschehen.

auf die xy Ebene projicirt, so ist die Grenzkurve der Projection gleichzeitig die Grenze der Werthesysteme von x und y, die reelle Werthe von z zulassen. An der anderen Seite der Grenzkurve wird mithin z complex. Wenden wir dies auf die Oberfläche $f(z, \alpha, \beta) = 0$ an, so erkennen wir, dass es eine Reihe von Werthen von z giebt, für welche α und β gleichzeitig reell sein können und eine Reiche solcher, wo allemal eines von beiden complex ist, weil gemäss der obigen Einschränkung z nur reell sein darf. Es mögen diese Werthe beispielsweise auf der z Coordinate, die durch den Punkt $x_1\ y_1$ geht, so vertheilt sein, dass von $-\infty$ bis z_1 kein System gleichzeitig reeller Werthe von α und β möglich ist, ebensowenig von z_2 bis $+\infty$, dass also längs des Stückes $z_1\ z_2$ die einzigen reellen Werthesysteme von α und β fallen. Lassen wir nun x_1 und y_1 variiren, und zwar durch die ganze xy Ebene, so wird die Linie $z_1\ z_2$ ebenfalls der Lage und Länge nach variiren, und ihr geometrischer Ort wird ein Raum werden, innerhalb dessen für die allen seinen Punkten entsprechenden xyz reelle Werthepaare von α und β möglich sind, ausserhalb dessen stets eine dieser Grössen complex sein muss. Ich werde den letzteren Raum den imaginären, ersteren den reellen und die Oberfläche, welche beide trennt, die allgemeine Enveloppe nennen.

Ausser der allgemeinen Enveloppe entstehen deren noch zwei Schaaren auf folgende Weise. Giebt man dem α einen festen Werth α_1, so wird die Oberfläche $f(z, \alpha, \beta) = 0$ von der $z\beta$ Ebene in der Kurve $f(z, \alpha_1, \beta) = 0$ geschnitten, und es wird wieder ein Raum angegeben werden können, in welchem β reell sein kann. Die Oberfläche, welche diesen Raum begrenzt, variirt mit α_1. Ebenso kann man durch Variation von β_1 die zweite analog erzeugte Flächenschaar erhalten.

Die Gleichung der allgemeinen Enveloppe lässt sich leicht aufstellen. Wir müssen dazu auf die Oberfläche $f(z, \alpha, \beta) = 0$ zurückgehen. Fasst man irgend einen Punkt z_i auf der z Axe ins Auge: so wird die Kurve $f(z_i, \alpha, \beta) \equiv f_i(\alpha, \beta) = 0$ auf der durch diesen Punkt parallel der $\alpha\beta$ Ebene gelegten Ebene zu liegen kommen, und wird der Ort aller diesem Punkt xyz_i zugehörigen reellen Werthepaare von α und β sein. Die Ebene, welche durch z_i gelegt ist, schneidet die Oberfläche $f(z, \alpha, \beta) = 0$ in

der Kurve $f_i(\alpha, \beta) = 0$. Tangirt diese Ebene für irgend einen Werth von z_i die Oberfläche, so wird für den Berührungspunkt $\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0$ und $f(z, \alpha, \beta) = 0$, woraus man den Werth von z für letzteren Punkt finden kann. Dieses z gehört aber der allgemeinen Enveloppe an, wenn jener Punkt einem Maximum oder Minimum entspricht, weil er die reellen Werthe von α, β, die alle in der Oberfläche $f(z, \alpha, \beta) = 0$ liegen, in der z Richtung beschliesst.

In dem Falle, wo für jenen Punkt die Oberfläche entgegengesetzte Krümmungen hat, oder er in einer Wendelinie liegt etc., kann das dazu gehörige z einer Oberfläche entsprechen, die ähnliche Eigenschaften hat, wie die allgemeine Enveloppe; ich werde aber an dieser Stelle hierauf nicht weiter eingehen, da es erspriesslicher ist, bei dergleichen Untersuchungen besondere Fälle zu betrachten.

Dasselbe Raisonnement kann für die x und die y Axe wiederholt werden. Man erhält daher für die allgemeine Enveloppe noch die Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0, \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial y}{\partial \beta} = 0.$$

Alle diese Gleichungen sind enthalten in den folgenden:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und $f = 0$, α und β eliminirt, erhält man die Gleichungen der allgemeinen Enveloppe. Es dürfen indess selbstverständlich mit $\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}$ nicht gleichzeitig $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ verschwinden.

Um alle Werthe, welche α und β annehmen können, zu construiren, hat man dafür in die Gleichung $f = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 i$ und $\beta_1 + \beta_2 i$ zu setzen. Sie zerfällt dann in zwei andere, welche man als Gleichungen zweier Oberflächen ansehen kann. Es sollen α_2 und β_2 deren z Axen und α_1 und β_1 deren x und y Axen vorstellen. Diese beiden Oberflächen schneiden sich dann in der $\alpha_1 \beta_1$ Ebene und zwar in der Kurve $f(\alpha_1, \beta_1) = 0$ oder $f(\alpha, \beta) = 0$, da in dieser Ebene $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$ mithin $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ ist. Daher entsprechen reelle Werthepaare von α, β nur den Punkten der Kurve $f(\alpha, \beta) = 0$. Für alle übrigen Punkte der $\alpha\beta$-Ebene sind beide oder ist eines complex. Im imagi-

nären Raum verlassen beide Oberflächen die $\alpha_1 \beta_1$ Ebene, mit der sie in der allgemeinen Enveloppe noch gleichzeitig einen Punkt gemein haben. Die Gleichungen dieses Punktes sind nach dem Vorigen: $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$.

Alles, was über den Gang der Variabeln der Gleichung $f = 0$ gesagt wurde, gilt ohne Beschränkung von denen der Gleichung $F = 0$. Man braucht sich an Stelle von α und β nur p und q geschrieben zu denken. Es findet aber zwischen diesen beiden Paaren von Variabeln die wichtige Beziehung statt, dass sie in vielen Fällen die allgemeine Enveloppe gemein haben. Dies leuchtet sofort ein, wenn man sich vergegenwärtigt, wie die Gleichung $F = 0$ aus der Gleichung $f = 0$ entstanden ist. Jene entsteht aus dieser, wenn man darein für α und β ihre Werthe in p und q einsetzt. Daher ist:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial p},$$
$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial q}.$$

Es müssen also gleichzeitig mit $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ auch $\frac{\partial F}{\partial p}$ und $\frac{\partial F}{\partial q}$ verschwinden, wenn nicht eine von den Grössen $\frac{\partial \alpha}{\partial p}$, etc. unendlich wird.

Es ist nur hinzuzufügen, dass, wenn p, q und α, β dieselbe Enveloppe haben, und man will sie durch Elimination von p und q aus $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$ erhalten, die Grössen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ nicht gleichzeitig verschwinden dürfen.

Indem ich nun zur Interpretation der Gleichung $F = 0$ übergehe, unterwerfe ich sie noch der ferneren und letzten Einschränkung, dass in Zukunft nur von den reellen Werthen von p und q die Rede sein wird. Es ist in diesem §. meine Absicht gewesen, auf die Schwierigkeiten aufmerksam zu machen, welche noch zu überwinden sind, um eine genügende Theorie der singulären Auflösungen der partiellen Differentialgleichungen von der Form $F = 0$ aufzustellen. Was endlich noch deren besondere Auflösungen mit einer Constanten, wie sie am Schlusse des §. 2 erwähnt wurden, betrifft, so habe ich allerdings ihren geometrischen Sinn in diesem §. kurz angedeutet. In wiefern diese besonderen Auflösungen von Wichtig-

keit sind, wird die Folge ergeben. Da nämlich der Integrale mit zwei Constanten beliebig viele gefunden werden können, so kommt es darauf an, dass es darunter solche von ausgezeichneten Eigenschaften gebe, soll sich an die daraus hergeleiteten Integrale mit einer Constanten einiges Interesse knüpfen.

Uebrigens ist es unzweifelhaft, dass nur mit Hülfe der im Cap. II auseinanderzusetzenden Betrachtungsweise Licht in die Theorie der singulären Auflösungen der partiellen Differentialgleichungen wird gebracht werden können.

§. 4.

Integraloberflächen und Charakteristiken.

Man kann der Gleichung $F=0$ zwei analytische Bedeutungen beilegen, die im Resultat auf eins herauskommen. Man kann einmal sagen, dass sie integrirt ist, wenn man zwei Functionen p und q von x, y, z kennt, welche ihr genügen und gleichzeitig die Bedingung der Integrabilität $\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}q=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial z}p$ erfüllen, oder man kann verlangen, dass drei Functionen z, p, q von x und y gefunden werden, die sie identisch erfüllen, und zwischen denen die Gleichungen $\frac{\partial z}{\partial x}=p$ und $\frac{\partial z}{\partial y}=q$ stattfinden. Die letztere Vorstellungsweise eignet sich zur geometrischen Interpretation und ist auch von Monge seinen berühmten Untersuchungen zu Grunde gelegt worden.

Die Variabeln x, y, z, p, q denkt man sich alsdann im Integral verbunden durch drei Gleichungen $f\ (x,\ y,\ z)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}=0$, und man kann nun die Gleichung $f=0$ als Gleichung einer Oberfläche ansehen, die wir Integraloberfläche nennen wollen, gleichgültig ob jene Gleichung ein besonderes oder ein allgemeines Integral ist. In diesem Sinne ist also die allgemeine Enveloppe (wenigstens in den meisten Fällen) eine Integraloberfläche.

Bei der Untersuchung des Integrals der Gleichung $F=0$ geht Monge von der Betrachtung der Integrale mit zwei Constanten aus. Ich habe seinen Weg verlassen, weil dabei gewisse Schwierigkeiten unerledigt blieben. Indessen will ich hier das für das Folgende Unentbehrliche aus seiner Theorie der Charakteristiken anführen.

Es sei wieder $f\equiv f\ (x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta)=0$ ein Integral mit

zwei Constanten der Gleichung $F=0$. Wird α ein fester, β ein veränderlicher Werth beigelegt, so erhält man eine Schaar von Oberflächen, deren Hülle, wie bekannt, der Ort ihrer Durchschnittslinien ist, die MONGE Charakteristiken nennt. Lässt man nun α variiren, so erhält man eine Schaar von Oberflächenschaaren, welche alle Oberflächen enthält, die in der Gleichung $f=0$ enthalten sind. Aus der Gleichung $f=0$ leitet man dann noch das allgemeine Integral ab, das aus den Gleichungen $f=0$ und $\frac{df}{d\alpha}\equiv\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=0$ besteht, und welches durch Variation der Function β von α einem sehr mannigfaltigen System von Integraloberflächen entspricht. Die im System $f=0$ enthaltenen Oberflächen schneiden sich vielfältig. Wenn sie sich unter endlichem Winkel schneiden, so wird der Ort einer Schaar solcher successiver Durchschnittslinien im Allgemeinen keine Integraloberfläche sein. Dies werde ich später beweisen. Nur dann, wenn die sich schneidenden Oberflächen in der Schnittkurve die Berührungsebene gemein haben, heisst sie Charakteristik. Ihre Gleichungen sind:

$$f=0,\ \frac{\partial f}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial f}{\partial\beta}d\beta=0,$$

wo α, β und $d\alpha$ und $d\beta$ längs der ganzen Charakteristik constante Grössen sind.

Ich werde nun noch zeigen, dass allgemein α und β constant sind längs irgend einer Charakteristik, welche die Schnittkurve irgend zweier im allgemeinen Integral $f=0$, $\frac{df}{d\alpha}=0$ enthaltener Oberflächen ist. Man geht von der Oberfläche

$$f=0,\ \frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=0$$

zu einer unendlich nahe gelegenen über, wenn man dem β eine Variation $\delta\beta$ hinzufügt, wodurch α in $\alpha+\delta\alpha$ übergeht. Die erste jener Gleichungen giebt dann:

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial f}{\partial\beta}\delta\beta=0,$$

wo aber

$$\delta\beta=\delta(\beta)+\frac{d\beta}{d\alpha}\delta\alpha\ ^{*})$$

ist. Daraus folgt:

$$\delta(\beta)=0.$$

---

*) Ich bezeichne mit $\delta\beta$ die totale und mit $\delta(\beta)$ die partielle Variation in der also α als unverändert angesehen wird. In concreten Fällen ist $\delta(\beta)$

Dies ist aber nur möglich, wenn α constant ist. Daher ist auch β constant, und jene Behauptung erwiesen.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich über zum eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung, nämlich zur Construction der Integraloberflächen der Gleichung $F = 0$, wobei ich es für zweckmässig gehalten habe, mit der Construction der Differentialgleichung $F = 0$ zu beginnen, abweichend von Monge, der, wie eben angedeutet, von der Betrachtung des Integrals ausgeht.

II. Construction der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$.

§. 5.

Bedeutung der Grössen p und q.

Es seien ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten irgend eines Strahles, der durch den Punkt x, y, z geht, so werde ich die Grössen:

$$\frac{\xi - x}{\zeta - z}, \quad \frac{\eta - y}{\zeta - z}$$

seine Neigungstangenten nennen.

Bezeichnet man mit n_1, n_2 die Neigungstangenten der Normale an die Oberfläche $f = 0$ im Punkte xyz; so weiss man aus der Theorie der Oberflächen, dass

$$p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -n_1, \quad q = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -n_2$$

ist. Es sind also p und q die negativen Neigungstangenten der Normale an die Oberfläche $f = 0$.

Wir können nun die Definition der Integraloberflächen noch etwas anders, als im §. 4 geschah, formuliren. Wir werden darunter jede Oberfläche verstehen, deren sämmtliche Normalen Neigungstangenten haben, zwischen denen für jeden Punkt xyz der Oberfläche die Relation $F(x, y, z, -n_1, -n_2) = 0$

---

als durch Variation verschiedener in β enthaltener Parameter $a, b, c \ldots$ entstanden aufzufassen. Es ist alsdann: $\delta(\beta) = \frac{\partial \beta}{\partial a}\delta a + \frac{\partial \beta}{\partial b}\delta b + \text{etc.} = 0$, welche Gleichung nach α aufgelöst einen constanten Werth dafür ergiebt.

besteht. Umgekehrt, wenn die Neigungstangenten der Normale an eine Oberfläche für irgend einen ihrer Punkte xyz die Gleichung $F=0$ erfüllen, so wird in diesem Punkte die in Rede stehende Oberfläche eine Integraloberfläche tangiren. Eine Oberfläche ferner, die in allen ihren Punkten Integraloberflächen berührt, muss nach dem ebengesagten nothwendig selbst eine Integraloberfläche sein, und hieraus ergiebt sich der Satz, dass die Umhüllungsfläche von Integraloberflächen selbst eine Integraloberfläche ist.

§. 6.

Der Kegel der Normalen.

Wir werden jetzt von dem übrigen Verlauf einer stetigen Integraloberfläche absehen und untersuchen, welche Bestimmung die Gleichung $F=0$ in Bezug auf ein Element einer solchen Oberfläche für jeden Punkt xyz des Raumes liefert. Zunächst ist klar, dass sie nur Bestimmungen, die Lage der Normale betreffend, enthält, und dass die Krümmung der Oberfläche explicite nicht darin vorkommt. Führt man die laufenden Coordinaten ξ, η, ζ der Normale in die Gleichung $F=0$ ein, so wird sie:

$$F\left(x, y, z, -\frac{\xi-x}{\zeta-z}, -\frac{\eta-y}{\zeta-z}\right)=0,$$

d. h. sie wird die Gleichung einer Kegelfläche, die ihre Spitze im Punkt xyz hat, und deren Strahlen eben sämmtlich Normalen an Integraloberflächen sind, die durch den Punkt xyz gehen, oder vielmehr zunächst an deren Elemente in diesem Punkt. Ich werde diesen Kegel den Normalenkegel nennen. Da die Coordinaten x, y, z seiner Spitze sonst noch in seine Gleichung eingehen, so spielen sie die Rolle von Parametern, und es verändert sich seine Gestalt von einem Punkte des reellen Raumes zum andern. In der allgemeinen Enveloppe, wenn diese gleichzeitig eine singuläre Auflösung vorstellt, schrumpft er zu einer Geraden zusammen, die darauf senkrecht steht.

Hiermit ist nun die volle geometrische Bedeutung der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Argumenten erkannt, und wir können das Problem ihrer Integration folgendermassen aussprechen. Man construire für jeden Punkt des Raumes als Spitze eine Kegelfläche, die nach irgend

einem gegebenen Gesetze von einem Punkt des Raumes als Spitze zum anderen Gestalt und Lage ändert, deren Construction auch für gewisse Theile des Raumes nach eben dem Gesetze unmöglich werden kann. Ist jenes geschehen, so lege man durch den Raum eine Oberfläche von solcher Beschaffenheit, dass ihre Normalen durchweg Strahlen der für ihre Fusspunkte als Spitzen construirten Normalenkegel sind. Die Gleichung dieser Oberfläche wird alsdann ein Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung sein.

Was die Gestalt des Normalenkegels betrifft, so kann sie eine beliebige sein. Denkt man sich um seine Spitze als Mittelpunkt eine Kugel construirt, und nennt Directrix die Linie in der die Kugel von der Kegelfläche geschnitten wird, so bestimmt die Directrix die Gestalt der Kegelfläche, und man erkennt, dass die Natur des Integrals der Gleichung $F=0$ wesentlich von der Normalenkegeldirectrix und von deren Veränderung durch den Raum abhängt. Unsere Aufgabe wird es sein, von dieser Abhängigkeit eine präcise Vorstellung zu gewinnen. Die Gestalt der Directrix ist allerdings willkürlich und keinen Bedingungen unterworfen, sie kann eine Spirale, eine Schleife etc. sein. Der Einfachheit halber werde ich aber, wo nicht ausdrücklich eine andere Voraussetzung gemacht wird, annehmen, dass die Directrix eine geschlossene Kurve ohne Wendepunkte und Unstetigkeiten sei, etwa wie die Directrix eines Kegels mit elliptischer Basis. Wenn die Directrix ein grösster Kreis ist, so wird die Kegelfläche eben, und wir werden die Ebene, insofern sie als abgeflachte Kegelfläche oder als der Ort sämmtlicher von einem Punkte in ihr ausgehenden Strahlen angesehen wird, einen Strahlenfächer nennen.

§. 7.

Das Strahlenbüschel der Integralkurven und dessen Begrenzung: der Polarkegel.

Jedem Strahl p, q des Normalenkegels $F=0$ entspricht eine Tangentialebene an eine durch seine Spitze xyz gehende Integraloberfläche.

Nennen wir nun schlechtweg »Integralkurve« jede Linie, die auf einer Integraloberfläche der Gleichung $F=0$

liegt, so sehen wir, dass jede Tangentialebene ein Strahlenfächer (§. 6) ist für die Elemente der Integralkurven, welche die Spitze des Kegels passiren. Weil nun zu jedem Strahl des Kegels $F=0$ eine Tangentialebene gehört, so bilden diese eine Schaar von Strahlenfächern, mithin bilden alle Elemente von Integralkurven, die den Punkt xyz passiren, ein Strahlenbüschel, das **Strahlenbüschel der Integralkurven.**

Auf jedem Strahl des Büschels steht eine oder eine beschränkte Anzahl Normalen senkrecht, wie man daraus erkennt, dass die Normale in einer auf dem Strahl senkrechten Ebene liegen muss. Die zum Strahl gehörigen Normalen sind also die Schnittlinien des Normalenkegels mit der im Punkt xyz senkrecht auf den Strahl gelegten Ebene.

Das Strahlenbüschel der Integralkurven hat eine Begrenzung, d. h. nicht jeder vom Punkt xyz ausgehende Strahl gehört dazu und kann das Element einer Integralkurve sein. Wir wollen nun diese Begrenzung aufsuchen.

Man denke sich eine Ebene so bewegt, dass einer ihrer Punkte unverrückt bleibt, so werden ihre verschiedenen Lagen eingehüllt von einer Kegelfläche, welche der Polarkegel des Kegels ist, den die Normale an die Ebene im festen Punkt beschreibt. Diess ist leicht einzusehen. Denn während die Ebene von einer Lage zu einer unendlich nahen übergeht, hat die Normale an die Ebene einen kleinen Winkel beschrieben, auf dessen beiden Schenkeln die Schnittlinie der beweglichen Ebene in ihren beiden Lagen senkrecht stehen muss. Mithin ist der Polarkegel die Enveloppe der Tangentialebenenschaar und auch die Begrenzung des Strahlenbüschels der Integralkurven.

Die Gleichung des Polarkegels kann man folgendermassen finden. Die Gleichung einer Tangentialebene sei:

$$p\,(\xi-x)+q\,(\eta-y)=\zeta-z.$$

Setzt man $p+dp$, $q+dq$ statt p und q, so geht man zu einer unendlich nahen Tangentialebene über; lässt man dabei $\xi\eta\zeta$ unverändert, so erhält man die Gleichung der Schnittlinie der beiden Tangentialebenen:

$$dp\,(\xi-x)+dq\,(\eta-y)=0.$$

Die Differentiale dp und dq müssen der Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\,dp+\frac{\partial F}{\partial q}\,dq=0$$

genügen, weil die Normale den Normalenkegel nicht verlässt, mithin folgt durch Elimination von dp, dq:

$$\frac{\partial F}{\partial p}(\eta - y) - \frac{\partial F}{\partial q}(\xi - x) = 0.$$

Eliminirt man p und q aus dieser Gleichung und den Gleichungen $F = 0$, $p(\xi - x) + q(\eta - y) = \zeta - z$ und setzt noch $\frac{\xi - x}{\zeta - z} \equiv a$, $\frac{\eta - y}{\zeta - z} \equiv b$, so ergiebt sich die Gleichung des Polarkegels:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0,$$

welcher eine wichtige Rolle in der Theorie der Gleichung $f = 0$ spielt.

§. 8.

Regel für das Strahlenbüschel.

Da das Strahlenbüschel der Integralkurven eine Begrenzung hat, und nicht jedes Kurvenelement auf einer Integraloberfläche liegen kann, so werde ich hier das einfache Kriterium angeben dafür, ob ein Kurvenelement dem Strahlenbüschel angehört oder nicht. Ich werde dabei annehmen, dass das Kurvenelement gegeben ist durch die Gleichungen der Kurve, zu der es gehört. Diese seien:

$$\lambda(x, y, z) = 0$$
$$\lambda_1(x, y, z) = 0$$

Seine Projectionen dx, dy, dz genügen demnach den Gleichungen:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy + \frac{\partial \lambda}{\partial z} dz = 0$$
$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} dz = 0$$

und seine Neigungstangenten sind: $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$. Soll das Element dem Büschel angehören, mit anderen Worten, auf einer Tangentialebene liegen, so muss ein Strahl pq des Normalenkegels darauf senkrecht stehen; es muss sein:

$$p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz} = 1.$$

Die Neigungstangenten $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ kann man aus den vorigen Gleichungen bestimmen. Wenn nun, nachdem dies geschehen, die vorstehende Gleichung mit der Gleichung $F = 0$ für einen der Kurve angehörigen Punkt xyz ein reelles Werthepaar

für p und q ergiebt, so gehört das zum Punkt xyz gehörige Element der Kurve offenbar zum Strahlenbüschel.

Wir werden später sehen, dass dies die einzige Bedingung ist, welche eine Kurve erfüllen muss, um auf einer Integraloberfläche liegen zu können, und wir können sie folgendermassen kurz ausdrücken.

Betrachten wir in den Gleichungen $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$ der gegebenen Kurve z als Argument, so wird die Kurve zwischen solchen Grenzen von z auf einer Integraloberfläche liegen können, zwischen denen die Gleichungen:

$$\lambda = 0, \; \lambda_1 = 0, \; F = 0,$$
$$p\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \lambda_1}{\partial z}\right) - q\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \lambda_1}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right),$$

nachdem man daraus x und y elimirt hat, reelle Werthepaare für p und q ergeben.

§. 9.

Recapitulation des Vorigen.

Legen wir um die Spitze des Normalenkegels eine Kugel, so sind also auf derselben zunächst folgende Kurven bemerkenswerth. Einmal die Directrices des Normalenkegels und zweitens diejenigen des Polarkegels. Die letzteren begrenzen ein Gebiet auf der Kugelfläche, welches der Ort ist der Punkte, in welchen die Tangenten an die Integralkurven vom Mittelpunkt aus die Kugeloberfläche treffen.

Ebenso gut wie wir zu jedem Strahl des Normalenkegels einen Strahlenfächer der Integralkurvenelemente construirt haben, können wir zu jedem Strahl des Strahlenbüschels einen oder mehrere Normalenkegelstrahlen aufsuchen, indem wir durch die Kegelspitze senkrecht auf die Integralkurve eine Ebene legen. Sie trifft den Normalenkegel in den gesuchten Strahlen, wobei ich nun jede Voraussetzung über die Gestalt des Normalenkegels fallen lasse.

So zerfällt das von den Directrices des Polarkegels begrenzte Gebiet in mehrere neue Gebiete: je nachdem es nämlich von Strahlen des Büschels getroffen wird, die auf einem, zweien oder mehreren Strahlen des Normalenkegels senkrecht stehen.

§. 10.

Einige allgemeine Bemerkungen über Polarkegel.

Construirt man für alle Punkte der Directrix einer Kegelfläche die sie senkrecht schneidenden grössten Kreise, trägt auf diesen grössten Kreisen von ihren Schnittpunkten mit der Directrix aus Quadranten ab, und verbindet die Endpunkte der Quadranten durch eine Kurve, so ist diese die Directrix des Polarkegels. Sie steht auf den grössten Kreisen senkrecht, zu Folge des Satzes, dass zwei Kurven, welche auf einer Oberfläche senkrecht durch dasselbe System von kürzesten Linien gezogen werden, von allen diesen kürzesten Linien gleich lange Stücke abschneiden. Daraus ergiebt sich noch, dass die Kegel gegenseitig polar sind.

Es sei nun $F(a, b) = 0$ die Gleichung einer Kegelfläche in Neigungstangenten ihrer Strahlen. Die Neigungstangenten des mit dem Strahl ab conjugirten Strahls des Polarkegels seien α, β, so gilt die Gleichung:

$$a\alpha + b\beta + 1 = 0.$$

Man erhält nach dem Vorigen die Gleichung $F_1(\alpha, \beta) = 0$ des Polarkegels durch Elimination von a und b aus den Gleichungen:

$$F(a, b) = 0,\ a\alpha + b\beta + 1 = 0,\ \frac{\partial F}{\partial a}\beta - \frac{\partial F}{\partial b}\alpha = 0.$$

Man muss also die Gleichung $F(a, b) = 0$ zurückerhalten, wenn man α und β aus den Gleichungen:

$$F_1(\alpha, \beta) = 0,\ a\alpha + b\beta + 1 = 0,\ \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} b - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} a = o$$

eliminirt.

Um den analytischen Grund dieser Reciprocität kennen zu lernen, abstrahiren wir von der geometrischen Anschauung, und sehen:

$$u \equiv F(a, b) = 0$$

als eine gegebene Gleichung zwischen den Variabeln a und b an. Hierzu kommt dann noch eine andere Gleichung:

$$v \equiv \lambda(a, b, \alpha, \beta) = 0$$

zwischen den vier Variabeln a, b, α, β, welche die frühere $a\alpha + b\beta + 1 = 0$ vertritt. Lässt man diese vier Variabeln variiren, so kommt:

$$\frac{\partial u}{\partial a} da + \frac{\partial u}{\partial b} db = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial a} da + \frac{\partial v}{\partial b} db + \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

Da wir vier Variabele und nur die zwei Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ haben, so können wir zwischen den Variabeln noch eine Relation annehmen, ohne ihnen die Veränderlichkeit zu rauben, und wählen diese:

$$\frac{\partial v}{\partial a} da + \frac{\partial v}{\partial b} db = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

Zunächst ergiebt sich nun:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b}\right) = 0.$$

Denkt man sich in $u = 0$ die a, b durch die α, β mit Hülfe der Gleichungen $v = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b}\right) = 0$ ausgedrückt, so ist auch:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta = 0,$$

mithin:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Auf der Coexistenz der Gleichungen: $\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}\right) = 0$ beruht die in Rede stehende Reciprocität.

§. 11.

Der Polarkegel ist der Ort der Elemente der Charakteristiken und die Gleichung $\Phi = 0$ (§. 7) eine totale Differentialgleichung.

Jede Tangentialebene, die durch die Spitze xyz des Normalenkegels geht, wird von allen übrigen geschnitten. Geht man von einem Strahl des Normalenkegels zu einem unendlich nahe gelegenen über, so schneiden sich die diesen beiden Strahlen entsprechenden Tangentialebenen in einer Linie, welche in unmittelbarer Nähe des Punktes xyz mit dem Elemente einer Charakteristik, d. h. einer Schnittkurve unendlich naher Integraloberflächen zusammenfällt. Es ist dies Element also ein Strahl des Polarkegels. Mithin ist der Polarkegel der Ort der Elemente der Charakteristiken, die durch die Spitze

des Normalenkegels gehen. Ich werde ihn deshalb auch den »charakteristischen Kegel« nennen.

Die übrigen Schnittlinien der Tangentialebenen sind die Elemente der Schnittlinien von Integraloberflächen, welche sich unter endlichem Winkel treffen (§. 4). Wir können nun auch leicht einsehen, warum, allgemein zu reden, die Oerter dieser Linien nicht solche Integraloberflächen sein können, die von beiden sich schneidenden verschieden sind. Denn damit durch eine solche Linie eine, von den sich schneidenden verschiedene, Integraloberfläche ginge, müssten auf der Schnittlinie nicht allein die Normalen an die sich schneidenden Integraloberflächen, sondern auch die Normale an die Oerteroberfläche senkrecht stehen. M. a. W. es müsste eine durch die Spitze des Normalenkegels senkrecht auf die Schnittlinie gelegte Ebene den Kegel dreimal schneiden, was nicht allgemein zutreffen kann.

Die Gleichungen einer Charakteristik denke man sich in xyz gegeben, und z sei das Argument, dann sind

$$\frac{dx}{dz}=x', \frac{dy}{dz}=y'$$

die Neigungstangenten des Elements, welches den Punkt xyz passirt. Wir können demnach in der Gleichung $\Phi=0$ (§. 7) x' und y' statt a und b schreiben und erhalten so eine totale Differentialgleichung:

$$\Phi\ (x, y, z, x', y') = 0,$$

welche die Differentialgleichung der Charakteristiken ist, und mit deren allgemeiner Theorie wir uns nun beschäftigen wollen.

III. Ueber totale Differentialgleichungen von der Form $\Phi\ (x, y, z, x', y') = 0$.

Erst nachdem ich das vorliegende Kapitel geschrieben hatte, erlangte ich Einblick in die von Pfaff erwähnte Abhandlung Monge's:

(Par. Mém. 1784, S. 502). *Supplément, où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites sont susceptibles*

d'une véritable intégration et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées.

Es ist diese schwungvoll geschriebene und gedankenreiche Abhandlung noch heute höchst lesenswerth. Wenngleich ich übrigens daselbst die Form des allgemeinen Integrals der totalen Differentialgleichungen bereits vorgefunden habe, so sehe ich mich doch nicht veranlasst, dieses Kapitel zu unterdrücken, weil die Interpretation des Integrals, die Prüfung und Begründung seiner Allgemeinheit, die hinzutretende Bedingungsgleichung und dergleichen, aus der Kegeltheorie mit Leichtigkeit, aus der MONGE'schen Vorstellungsweise sich gewiss ziemlich schwer ableiten lassen, und auch in der erwähnten Abhandlung zum Theil nicht, zum Theil in ganz anderer Form gegeben sind. Der Zweck, den ich hier verfolge, ist übrigens der umgekehrte von dem MONGE's, da ich die Integration der Gleichung $\Phi = 0$ von derjenige der Gleichung $F = 0$ abhängig mache.

§. 12.

Ueber die geometrische Bedeutung der nicht linearen totalen Differentialgleichungen mit drei Variabeln.

Diese Gleichungen können, einer noch heut zu Tage trotz MONGE und PFAFF öfters ausgesprochenen Ansicht zuwider, interpretirt werden, und haben einen guten geometrischen Sinn. Construirt man nämlich für jeden Punkt xyz des reellen Raumes als Spitze den Kegel:

$$\Phi\,(x, y, z, x', y') \equiv \Phi\,\left(x, y, z, \frac{\xi - x}{\zeta - z}, \frac{\eta - y}{\zeta - z}\right) = 0,$$

dessen laufende Coordinaten also $\xi \eta \zeta$ sind, so erhält man eine Kurve, deren Gleichungen die vorgelegte $\Phi = 0$ identisch erfüllen müssen, wenn man verfährt, wie folgt. Von einem beliebigen Punkt xyz geht man auf einem Strahl des Kegels $\Phi = 0$, dessen Spitze der Punkt xyz ist, bis zu einem sehr nahe gelegenen Punkt $x_1 = x + dx$, $y_1 = y + dy$, $z_1 = z + dz$. Man construirt dann den Kegel $x_1 y_1 z_1$ *) und geht dann auf einem

---

*) Ich werde in Zukunft öfter einen Kegel durch die Coordinaten seiner Spitze bezeichnen. So ist der Kegel xyz derjenige, welcher für den Punkt xyz als Spitze construirt ist, nämlich der Kegel $\Phi\,(x, y, z, x', y') = 0$.

beliebigen Strahl dieses Kegels weiter bis zu einem dritten Punkt $x_2 = x_1 + dx_1$, $y_2 = y_1 + dy_1$, $z_2 = z_1 + dz_1$, u. s. f. Die Kurve, welche die Grenze der so erhaltenen polygonalen Linie bildet, ist eine der in der Gleichung $\Phi = 0$ enthaltenen Kurven.

Dies festgestellt, ergiebt sich, dass, wenn neben der Gleichung $\Phi = 0$ die Gleichung $U = 0$ irgend einer Oberfläche, die aber durch den reellen Raum geht, gegeben ist, durch beide Gleichungen $U = 0$ und $\Phi = 0$ im Allgemeinen eine Schaar räumlicher Kurven bestimmt ist, welche folgendermassen construirt werden kann. Man construirt für irgend einen Punkt der Oberfläche den zu ihm gehörigen Kegel. Schneidet dieser Kegel die Oberfläche nicht, so entspricht den Gleichungen $\Phi = 0$, $U = 0$ kein System räumlicher Kurven. Die analytische Bedingung dafür, dass der Kegel die Oberfläche schneide, ist, dass die Gleichungen $U = 0$, $\Phi = 0$, $\frac{dU}{dz} = 0$, wenn man daraus eine von den Grössen xyz eliminirt hat, ein reelles Werthesystem von x' und y' liefern. Schneidet der Kegel die Oberfläche, so hat man in der Schnittlinie von seiner Spitze bis zu einem unendlich nahe gelegenen Punkt weiter zu gehen, zu diesem Punkt abermals seinen Kegel zu construiren, u. s. f. Auf diese Weise entsteht auf der Oberfläche ein Individuum der Kurvenschaar. Die Gleichungen dieser Schaar sind erstens $U = 0$ und dann das Integral der durch Elimination z. B. von y und y' aus $\Phi = 0$, $U = 0$, $\frac{dU}{dz} = 0$ erhaltenen gewöhnlichen Differentialgleichung.

Wir sehen also, dass zur vollständigen Bestimmung einer in der Gleichung $\Phi = 0$ enthaltenen Kurve ihr Anfangspunkt und eine ihrer Projectionen gegeben sein muss. Es wird daher das Integral der Gleichung $\Phi = 0$ in seiner allgemeinsten Form eine willkürliche Funktion und eine willkürliche Constante enthalten. Ich werde nun zeigen, wie man ein Integral mit einer willkürlichen Funktion finden kann, lasse aber dahingestellt, ob diese Integration ein anderes Interesse hat, als das einer reinen Transformation der Gleichung $\Phi = 0$.

§. 13.

Ueber die Form des allgemeinen Integrals der Gleichung $\Phi = 0$.

Nehmen wir neben der Gleichung $\Phi = 0$ irgend eine andere:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

an, in der α und β Parameter bedeuten, eliminiren aus $f = 0$, $\frac{df}{dz} = 0$, $\Phi = 0$ z. B. y und y', integriren die so erhaltene Gleichung, dann sei:

$$f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

das Integral der so gewonnenen Differentialgleichung. Die beiden Gleichungen $f = 0$ und $f_1 = 0$ bilden ein Integral mit drei Constanten der Gleichnng $\Phi = 0$. Sieht man darin α als Funktion von z, β und γ als Funktionen von α an, und differenzirt beide Gleichungen nach z, so kommt:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} + \alpha' \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \beta' \frac{\partial f}{\partial \beta} \right),$$

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial x} x' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} + \alpha' \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \beta' \frac{\partial f_1}{\partial \beta} + \gamma' \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \right).$$

Setzt man die beiden Klammern rechter Hand gleich Null, so bleiben die Werthe von x, y, x', y' der Form nach dieselben, und genügen daher der Gleichung $\Phi = 0$. Wenn man nun xyz aus den vier Gleichungen: $f = 0$, $f_1 = 0$, $\frac{df}{d\alpha} = 0$, $\frac{df_1}{d\alpha} = 0$ eliminirt, so enthält die Resultirende α, β, γ, β', γ' und ist folglich eine neue totale Differentialgleichung. Haben aber beide Funktionen f und f_1 eine solche Form, dass:

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

ist, so ergiebt sich $\beta' = \gamma$ und die vier Gleichungen reduciren sich auf folgende drei:

$$f = 0, \ \frac{df}{d\alpha} = 0, \ \frac{d^2 f}{d\alpha^2} = 0,$$

welche nun in gewisser Beziehung die Rolle des allgemeinen Integrals der Gleichung $\Phi = 0$ spielen, weil in ihnen eine willkürliche Funktion β von α vorkommt. Sobald man über diese Funktion verfügt hat, geben die drei Gleichungen durch Elimination von α allerdings ein Integral in zwei Gleichungen der Gleichung $\Phi = 0$. In jenem Integral in drei Gleichungen fehlt indessen die willkürliche Constante, und statt dessen finden sich darin die Differentialquotienten β' und β'', weshalb man

ihm auch nicht volle Allgemeinheit zuerkennen kann, wie dies öfters geschehen ist. Ist neben dem Integral eine Bedingung in xyz gegeben, so liefert deren Elimination aus der Bedingung und den drei Integralgleichungen eine Differentialgleichung zwischen α, β, β', β'', nach deren Integration man eine Constante zu viel hätte, welche zwar durch Einsetzen des Integrals in die Gleichung $\Phi = 0$ ihre Bestimmung finden würde. Man erhält jedoch durch folgende Betrachtung sofort eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung. Die gegebene Bedingung sei $\varphi = 0$. Differenzirt man diese Gleichung und die beiden ersten Integralgleichungen $f = 0$ und $\frac{df}{d\alpha} = 0$ total nach $xyz\alpha$, so fällt wegen der dritten Integralgleichung $d\alpha$ heraus, und man kann aus den drei so erhaltenen Gleichungen die Differentiale dx, dy, dz eliminiren. Dies giebt:

$$M \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f'}{\partial z}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f'}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f'}{\partial y}\right) = 0,$$

wo ich f' statt $\frac{df}{d\alpha}$ geschrieben habe.

Nun kann man aus den Gleichungen $f = 0$, $f' = 0$, $\varphi = 0$, $M = 0$ xyz eliminiren und behält offenbar eine Differentialgleichung zwischen den Grössen α, β, β', mithin erster Ordnung übrig.

§. 14.

Ermittelung der Gleichung $f = 0$.

Sie ergiebt sich folgendermassen. Es sei:

$$F(x, y, z, -n_1, -n_2) = 0$$

die Gleichung in Neigungstangenten $n_1\, n_2$ des Polarkegels des Kegels $\Phi = 0$. Setzt man nun p für $-n_1$, q für $-n_2$, so folgt die partielle Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$, deren Charakteristiken in allen ihren Elementen den Kegeln $\Phi = 0$ angehören und Gleichungen von der gewünschten Form:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \frac{df}{d\alpha} = 0$$

haben (§. 4). Hieraus folgt also das Integral in drei Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{df}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2 f}{d\alpha^2} = 0.$$

Aus dem Obigen geht noch hervor, dass jede der in $\Phi = 0$ enthaltenen Kurven in einer Integraloberfläche der Gleichung

$F=0$ liegt. Denn bestimmt man α aus $f=0$ und setzt es in die Gleichungen $\frac{df}{d\alpha}=0$, $\frac{d^2f}{d\alpha^2}=0$ ein, so wird die erste die Gleichung einer Integraloberfläche, deren Schnittlinie mit der Oberfläche $\frac{d^2f}{d\alpha^2}=0$ die betreffende Charakteristik ist. Diese Art Charakteristiken mit drei Gleichungen sind nach Monge Rückkehrkanten von Integraloberflächen, und wir werden bei Gelegenheit der Construction der Integrale der Gleichung $F=0$ noch ausführlicher darauf zurückkommen.

Es sei z. B. die totale Differentialgleichung $\Phi\ (x', y')=0$, in der also xyz nicht vorkommen, gegeben. Diese Variabeln kommen dann auch in der partiellen Differentialgleichung $F\ (p, q)=0$ nicht vor. Die Gleichungen $\Phi=0$ und $F=0$ sind mithin die Gleichungen von Kegeln, die Gestalt und Lage von einem Punkt des Raumes als Spitze zum andern nicht verändern. Es wird also durch die Gleichung einer Geraden, deren Neigungstangenten x' und y' sind, der Gleichung $\Phi=0$ Genüge geschehen. Auf die Eigenthümlichkeiten eines Strahlensystems, wie das vorliegende $\Phi=0$, werde ich später noch näher eingehen. Nennt man $\xi\eta\zeta$ die laufenden Coordinaten der Geraden $x'y'$ und verlegt die Coordinaten xyz des festen Punktes in ihren Gleichungen in die xy Ebene, indem man $z=0$ setzt, so werden sie:

$$\xi-x=x'\zeta,\ \eta-y=y'\zeta.$$

Sucht man nun die Enveloppe solcher sich successiviv schneidender Geraden, so hat man die x, y, x', y' als Functionen einer fünften Variabeln oder einer von ihnen selbst anzusehen und danach zu differenziren unter Berücksichtigung der Relation $\Phi=0$. Dies giebt:

$$-dx=\zeta dx',\ -dy=\zeta dy',\ \frac{\partial\Phi}{\partial x'}dx'+\frac{\partial\Phi}{\partial y'}dy'=0,$$

mithin

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x'}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y'}dy=0.$$

Die Funktion y von x ist offenbar willkührlich. Nimmt man an, sie sei gegeben, so kann man aus dieser letzten Gleichung, den Gleichungen der Geraden und $\Phi=0$ x, x', y' eliminiren und erhält so die Gleichung der Enveloppe, die der Gleichung $\Phi=0$ genügt. Man kann indessen auch anders verfahren.

Setzt man aus den Gleichungen der Geraden die Werthe von x' und y' in $\Phi = 0$ ein, so folgt:

$$\Phi\left(\frac{\xi - x}{\zeta}, \frac{\eta - y}{\zeta}\right) = 0.$$

Dies ist die Gleichung des Polarkegels des Kegels $F = 0$, mithin in diesem Falle die Gleichung einer Integraloberfläche der Gleichung $F = 0$. Um die Gleichung eines seiner Strahlen zu erhalten, hat man die Gleichung $\Phi = 0$ nach x zu differenziren, indem y als Funktion von x ansieht, durch Variation von $\frac{dy}{dx}$ erhält man successive alle seine Strahlen. Da diese Gleichung $\Phi = 0$ zwei Constanten hat, so giebt sie differenzirt gleichzeitig die Gleichungen der Charakteristik:

$$\Phi = 0, \ \frac{d\Phi}{dx} = 0$$

und man erhält die Enveloppe der sich schneidenden Charakteristiken, wenn man beide Gleichungen nach x differenzirt. Die erste giebt die zweite und die zweite giebt $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$.

§. 15.

Zusätze zum Vorigen.

Tritt zu der Gleichung $\Phi = 0$ eine andere $\Theta = 0$ zwischen denselben Variabeln hinzu, so werden beide Gleichungen durch eine »räumliche Kurvenschaar« dargestellt, deren Elemente die Schnittlinien der für jeden Punkt zu construirenden Kegel $\Phi = 0$, $\Theta = 0$ sind. Damit ein solches System orthogonal zu einer Oberflächenschaar sein könne, müssen die Gleichungen $\Phi = 0$, $\Theta = 0$ so beschaffen sein, dass $-p$ für x', $-q$ für y' gesetzt, p und q die Integrabilitätsbedingung erfüllen.

Setzt man in der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$, $-x'$ und $-y'$ für p und q, so wird sie ebenfalls eine totale Differentialgleichung und ihre Integralkurven sind in jedem Punkte normal zu einer durch diesen Punkt gehenden Integraloberfläche der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$. Wir stellen uns nun die Aufgabe zur Gleichung $F(x, y, z, -x', -y') = 0$ eine zweite $F_1(x, y, z, x', y') = 0$ zu finden von der Beschaffenheit, dass die Kurvenschaar $F = 0$, $F_1 = 0$ orthogonal zu einer Flächenschaar sei. Diese Flächenschaar muss dann eine Schaar von Integraloberflächen der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ sein. Setzt

man $-p$ und $-q$ für x' und y' in die Gleichungen $F=0$, $F_1=0$, so müssen also diese Grössen die Bedingung der Integrabilität: $\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{dz}q=\frac{dq}{dx}+\frac{dq}{dz}p$ erfüllen. Die Gleichung $F=0$ giebt, wenn man darin p und q als Funktionen von xyz ansieht:

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}=0$$

und durch Elimination von $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$, folgt die lineäre Gleichung:

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}+\frac{\partial q}{\partial z}\left\{\frac{\partial F}{\partial q}q+\frac{\partial F}{\partial p}p\right\}+\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

auf deren Integration Lagrange zuerst diejenige der Gleichung $F=0$ zurückgeführt hat.

IV. Ueber die lineären partiellen Differentialgleichungen.

§. 16.

Ueber die Integration der lineären partiellen Differentialgleichung mit drei Variabeln.

Sehr einfach gestaltet sich die geometrische Theorie der partiellen Differentialgleichungen von der Form

$$F \equiv Ap+Bq-1=0,$$

wo A und B irgend welche Funktionen von xyz sind.

Wegen

$$p=-\frac{\xi-x}{\zeta-z},\quad q=-\frac{\eta-y}{\zeta-z}$$

wird:

$$A(\xi-x)+B(\eta-y)+\zeta-z=0$$

die Gleichung des Normalenkegels, der also in diesem Falle in eine Ebene übergeht. Diese Ebene ist demnach der Ort aller Normalen an Integraloberflächen, welche den Fusspunkt xyz haben können. Der Normalenkegel wird mithin ein Strahlenfächer. Dadurch erhält man ein Strahlenbüschel der Integralkurvenelemente, welches gar keine Begrenzung hat, da der Polarkegel sich auf das Loth an den Strahlenfächer im Punkt xyz reducirt. Es geht hieraus hervor, dass jedes Kurvenelement auf einer Integraloberfläche liegen kann.

Die Charakteristiken bilden nämlich in diesem Falle eine räumliche Kurvenschaar, welche man ansehen kann als das System der Durchschnittslinien von zwei Oberflächenschaaren. D. h. jedem Punkt im Raume entspricht nur eine Charakteristik, die durch diesen Punkt geht, und ist ein Punkt einer Charakteristik gegeben, so ist sie ganz bestimmt, wie sich dies sehr leicht durch Construction beweisen lässt. Man construire nämlich für den Punkt xyz den Normalenfächer und das Loth darauf, auf diesem Loth gehe man bis zum Punkt $x_1 = x + dx$, $y_1 = y + dy$, $z_1 = z + dz$; construire dann zum Punkt $x_1 y_1 z_1$ wieder das Loth an den Normalenfächer und gehe auf diesem bis zu einem dritten Punkt x_2, y_2, z_2, u. s. f. Auf diese Weise entsteht eine, und kann nur eine Charakteristik entstehen.

Jede Oberfläche, welche durch die Charakteristiken gelegt wird, ist eine Integraloberfläche. Dieser Satz folgt ebenfalls aus der Construction. Man lege durch irgend zwei unendlich nahe Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$ die zugehörigen Charakteristiken. Denkt man sich durch beide Charakteristiken einen Flächenstreifen gelegt, so wird auf diesem Flächenstreifen in jedem seiner Punkte nothwendig ein Strahl des Normalenfächers senkrecht stehen, weshalb er ein Streifen einer Integraloberfläche ist. Wählt man irgend einen dritten, dem Punkt $x_1 y_1 z_1$ unendlich nahen Punkt $x_2 y_2 z_2$, und legt durch ihn die Charakteristik und durch die Charakteristiken $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ einen Flächenstreifen, so ist dieser ebenfalls ein Streifen einer Integraloberfläche und schliesst sich an den ersten an. So fügt sich Streifen an Streifen und es entsteht die Integraloberfläche, an welcher nur die Punkte xyz; $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$ etc. willkürlich sind, d. h. eine transversal durch die Charakteristiken gelegte Kurve. Daraus folgt, dass die Integraloberfläche nicht bestimmt ist, wenn man von ihr verlangt, sie müsse durch eine Charakteristik gehen, auch nicht, wenn sie durch eine endliche Zahl von Charakteristiken gehen soll, ebenso wenig wie eine Kurve bestimmt ist durch die Bedingung, dass sie durch eine endliche Zahl von Punkten gehen soll. Die Integraloberfläche ist nur dann bestimmt, wenn sie durch eine vorgeschriebene, nicht zur Schaar der Charakteristiken gehörige Kurve zu legen ist.

Die Differentialgleichungen des Systems der Charakteristiken erhält man auf folgende Weise.

Die Gleichungen des Loths an die Ebene:

$$A(\xi-x)+B(\eta-y)+\zeta-z=0$$

sind:

$$\frac{\xi_1-x}{A}=\frac{\eta_1-y}{B}=\zeta_1-z,$$

wo $\xi_1\eta_1\zeta_1$ die laufenden Coordinaten des Loths bedeuten. Sieht man das Loth als ein Element einer Charakteristik an, so hat man dx, dy, dz (die Projectionen dieses Elements) für ξ_1-x, η_1-y, ζ_1-z zu setzen, und

$$dx=Adz$$
$$dy=Bdz$$

werden dann die Differentialgleichungen der Charakteristiken. Es seien deren Integrale

$$\alpha=f\,(x,\,y,\,z),$$
$$\beta=f_1\,(x,\,y,\,z),$$

so finden die Constanten ihre Bestimmung dadurch, dass man die Charakteristik durch einen bestimmten Punkt $x_1y_1z_1$ gehen lässt. Es ist dann $\alpha=f\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$, $\beta=f_1\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$. Den Ort aller Charakteristiken, die durch eine gegebene Kurve:

$$\lambda\,(x_1,\,y_1,\,z_1)=0,$$
$$\lambda_1\,(x_1,\,y_1,\,z_1)=0$$

gehen, erhält man durch Elimination von $x_1y_1z_1$ aus den Gleichungen:

$$f(x_1,y_1,z_1)=f(x,y,z,),\ f_1\,(x_1,y_1,z_1)=f_1\,(x,y,z),\ \lambda=0,\ \lambda_1=0.$$

Das sogenannte allgemeine Integral der Gleichungen $Ap+Bq=1$ ist:

$$\varphi\,(f,\,f_1)=0,$$

wo φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Da nämlich die Beziehung zwischen x_1, y_1, z_1 in den Gleichungen $\alpha=f(x_1,y_1,z_1)$, $\beta=f_1\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$ willkürlich ist, so folgt daraus eine willkürliche Beziehung zwischen α und β, mithin zwischen f und f_1.

Statt der Gleichung $\varphi\,(f,\,f_1)=0$ können wir noch dem Integral die ebenso allgemeine Form:

$$\Theta\,(x,y,z,\varphi(u))=0$$

geben, wo φ die willkürliche Funktion bedeutet und u etwa f oder f_1 vorstellt. Es ist die besondere und wichtige Eigenthümlichkeit der linearen Differentialgleichungen, dass ihr Integral in e i n e r Gleichung und in expliciter Form die willkür-

liche Funktion erhält. Es findet dies sonst bei dem Integral keiner Gleichung von der Form $F(x, y, z, p, q) = 0$ statt. Mit a. W. man kann leicht zeigen, dass, wenn das allgemeine Integral die Form $\Theta(x, y, z, \varphi(u)) = 0$ hat, man durch Elimination von $\varphi(u)$ immer eine lineäre Differentialgleichung erhält. Durch Differentiation von Θ nach x und y folgt:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} + p\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} + q\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right\} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen $\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ eliminirt, erhält man

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0.$$

Hieraus φ mit Hülfe der Gleichung $\Theta = 0$ eliminirt, hat die Resultirende die Form $Ap + Bq = 1$. Die Integrale aller nicht lineären Differentialgleichungen müssen also eine andere Form wie $\Theta = 0$ haben.

Ueber die singulären Auflösungen der Gleichung $Ap + Bq = 1$. Die alte Regel für die Auffindung singulärer Auflösungen der partiellen Differentialgleichungen von der Form $F(x, y, z, p, q) = 0$, aus den Gleichungen: $F = 0, \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \frac{\partial F}{\partial q} = 0$ p und q zu eliminiren, ist auf die lineären Gleichungen, von denen dieser § handelt, natürlich nicht anwendbar. Daher hört man auch wohl die Ansicht aussprechen, diese Gleichungen hätten keine singulären Auflösungen. Sie haben deren aber dennoch, und man kann sich davon auf folgende Weise überzeugen.

Die Charakteristiken der Gleichung $Ap + Bq = 1$ seien wie oben die Durchschnittslinien der beiden Oberflächenschaaren $\alpha = f(x, y, z)$, $\beta = f_1(x, y, z)$. Von der zweiten Schaar $\beta = f_1$ will ich annehmen, sie habe keine Umhüllungsfläche, ihre Individuen füllten vielmehr den Raum aus, wie eine Schaar paralleler Ebenen. Die Schaar $\alpha = f$ soll aber eine Umhüllungsfläche haben und zwar eine solche, welche der Ort der successiven Durchschnittslinien der Oberflächen mit den Parametern α, $\alpha_1 = \alpha + d\alpha$, $\alpha_2 = \alpha_1 + d\alpha_1$, etc. ist, wo $d\alpha$, $d\alpha_1$, unendlich kleine Grössen vorstellen. Eine jede Oberfläche α wird längs ihrer Durchschnittslinie mit der Oberfläche $\alpha + d\alpha$ die Umhüllungsfläche berühren. Fasst man nun eine bestimmte Oberfläche α ins Auge, so wird ihre Durchschnittslinie mit einer

der Oberflächen β die Umhüllungsfläche nur in einem Punkt berühren, wenn nicht der besondere Umstand eintritt, dass die Durchschnittslinien der Oberflächen α und β mit denen der Oberflächen α und $\alpha + d\alpha$ zusammenfallen, ein Umstand, auf den hier keine Rücksicht genommen werden soll. Mit einem Worte, die Umhüllungsfläche der Oberflächen α ist der Ort der Umhüllungslinien der Durchnittslinien der beiden Oberflächenschaaren α und β, also nicht der Ort dieser Durchschnittslinien selbst, mithin wird die Gleichung der Umhüllungsfläche der Oberflächen α nicht in der allgemeinen Gleichung der Oerterflächen der Charakteristiken $\alpha = f$, $\beta = f_1$ enthalten sein.

Es sei $\alpha = f$ z. B. die Gleichung einer Schaar Kugeln von gleichem Halbmesser ϱ, deren Mittelpunkte auf der x Axe liegen, und α sei die x Coordinate der Mittelpunkte, daher:

$$\alpha = x + r,$$

wo $r = \pm \sqrt{\varrho^2 - y^2 - z^2}$, $\beta = f_1$ sei die Gleichung einer Schaar Ebenen, nämlich:

$$\beta = x + y + z.$$

Die Umhüllungsfläche der Schaar $\alpha = x + r$ ist ein wagrechter Kreiscylinder mit dem Halbmesser ϱ, dessen Axe mit der x Axe zusammenfällt, und dessen Gleichung ist: $y^2 + z^2 = \varrho^2$. Die partielle Differentialgleichung der Oerterflächen der Charakteristiken $\alpha = x + r$, $\beta = x + y + z$ lautet:

$$p \frac{y+z}{r+1} - q \frac{r+z}{r+y} = 1.$$

Diese Gleichung wird durch das Integral $y^2 + z^2 = \varrho^2$ befriedigt, denn es lässt p und r verschwinden und q wird $-\frac{y}{z}$. Das allgemeine Integral vorstehender Differentialgleichung ist aber: $x + r = \varphi(x + y + z)$, und durch Verfügung über φ lässt sich daraus offenbar nicht $y^2 + z^2 = \varrho^2$ herleiten.

Um das singuläre Integral mit Umgehung des allgemeinen Integrals aus der Differentialgleichung zu ziehen, hat man (§. 3) die Flächen zu suchen, welche die Grenzen des Gebietes bilden, in dem $x' = A$ und $y' = B$ gleichzeitig reell sein können. Da in diesem Fall $x' = \frac{y+z}{r+1}$, $y' = -\frac{r+z}{r+y}$ ist, so sieht man, dass, wenn $y^2 + z^2$ durch den Werth ϱ^2 hindurchgeht, x' und y' vom Reellen zum Imaginären übergehen.

Zweiter Abschnitt.

Die Construction der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es gelingt nicht leicht, eine der im §. 6 gegebenen analoge Construction für die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei Variabeln zu finden. Soll die Differentialgleichung vollständig sein, d. h. alle drei zweiten Differentialquotienten r, s, t enthalten, so kann man sie sogar nur, so weit ich die Sache übersehe, erreichen durch gewisse Schaaren von Oberflächen zweiten Grades, die für jeden Punkt im Raum zu construiren sind, was dem Problem der Construction ihrer Integraloberflächen auf diesem Wege den Charakter unentwirrbarer Complication verleiht. Ich habe in Folge dessen einen anderen Weg eingeschlagen, der darin besteht, dass ich die Grössen p und q als die z Ordinaten zweier Oberflächen ansehe, die, mit der Integraloberfläche durch gewisse Gleichungen verbunden, gleichzeitig mit ihr zu construiren sind. Im gegenwärtigen Abschnitt werde ich nur die Elemente der Lehre von den Charakteristiken der in Rede stehenden Differentialgleichungen darlegen, da zur weiteren Durchführung derselben erst im folgenden Abschnitt zu entwickelnde Principien erforderlich sind.

V. Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

§. 17.

Ueber Systeme von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit vier Variabeln.

Es sei gegeben folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\text{I.}\begin{cases} up + vq = 1, \\ \mathfrak{u}p_1 + \mathfrak{v}q_1 = 1, \end{cases}$$

wo u, v, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ irgend welche Funktionen von x, y, z, z_1 bedeuten und p_1 und q_1 die ersten partiellen Differentialquotienten von z_1 nach x und y vorstellen.

Es wird beiden Gleichungen offenbar durch ein System von zwei Gleichungen zwischen $xyzz_1$ genügt, und ihr Integral kann mithin dargestellt werden durch zwei Oberflächen, deren Gleichungen sein mögen:

$$z = f(x, y),$$
$$z_1 = f_1(x, y).$$

Diese Oberflächen wollen wir construiren.

Ich werde conjugirte Punkte der beiden Oberflächen solche nennen, die auf einer z Ordinate liegen, und ebenso werden als conjugirt alle Bestandtheile der beiden Oberflächen zu bezeichnen sein, welche conjugirten Punkten angehören.

Dies vorangeschickt, denke man sich in den Gleichungen I statt $p\ q\ p_1\ q_1$ gesetzt die Neigungstangenten der congugirten Normalen:

$$-\frac{\xi - x}{\zeta - z}, \quad -\frac{\eta - y}{\zeta - z}; \quad -\frac{\xi_1 - x}{\zeta_1 - z_1}, \quad -\frac{\eta_1 - y}{\zeta_1 - z_1},$$

wo ξ, η, ζ; ξ_1, η_1, ζ_1 deren laufende Coordinaten bedeuten, so folgt:

$$u(\xi - x) + v(\eta - y) + \zeta - z = 0,$$
$$\mathfrak{u}(\xi_1 - x) + \mathfrak{v}(\eta_1 - y) + \zeta_1 - z_1 = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man nun zunächst die Differentialgleichungen I construiren.

Man markire auf einer z Ordinate, die den Fusspunkt xy hat, zwei Höhen z und z_1, construire zum Punkt z als Ursprung den Normalenstrahlenfächer, dessen Lage bestimmt ist durch die Neigungstangenten (u, v) seines Loths. Ebenso construirt man für den Punkt z_1 den Strahlenfächer der Normalen, dessen Loth die Neigungstangenten $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ hat. Die Lothe an beide Strahlenfächer sind offenbar die Elemente der conjugirten Charakteristiken, welche durch die Punkte z und z_1 gehen. Denn jedes Paar von conjugirten Integraloberflächen, welches durch diese beiden Punkte geht, muss auch diese Lothe enthalten, da auf ihnen alle Strahlen der beiden Fächer senkrecht stehen.

Denkt man sich nun den Punkt z fest, den Punkt z_1 beweglich, so sieht man, dass, während der Punkt z_1 alle Lagen auf der z Ordinate durchläuft, das Loth an den Strahlenfächer z einen Kegel, den charakteristischen Kegel beschreibt. Für jede Lage der Punkte z und z_1 ist mithin die Lage der conjugirten Charakteristiken eine feste, und sie variirt für beide Punkte, wenn die Lage des einen Punkts verändert wird.

Will man nun aber mit den angegebenen Elementen die Construction der Charakteristiken fortsetzen, etwa wie wir dies bei den Charakteristiken der Gleichung $Ap + Bq = 1$ im vorigen §. gethan haben, so stösst man auf eigenthümliche Schwierigkeiten, die ganz neue Ueberlegungen veranlassen. Dieselben Schwierigkeiten kehren im Allgemeinen bei den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung wieder, und da sie, wie mir scheint, der Grund sind, warum man bis jetzt keine allgemeine Methode der Auflösung der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung besitzt, so will ich in diesem sehr einfachen Falle sie näher bezeichnen.

Man denke sich für die Punkte xyz und xyz_1 die Elemente der Charakteristiken construirt. Die Enden der Elemente, welche nicht in der z Ordinate mit dem Fusspunkte xy liegen, befinden sich in zwei andern z Ordinaten mit den Fusspunkten $x'y'$, $x'_1y'_1$, und ihre Höhen werden sein $z'z'_1$. Ich nehme nun an, man wolle die zu xyz_1 gehörige Charakteristik weiter construiren. Zu dem Zweck construirt man natürlich zunächst den charakteristischen Kegel für den Punkt $x'_1 y'_1 z'_1$. Welchen Strahl dieses Kegels man zur Fortsetzung der Charakteristik wählen soll, hängt aber ab von der Lage des Punktes, in welchem die z Ordinate mit dem Fusspunkt $x'_1 y'_1$ die Oberfläche schneidet, zu der die Charakteristik xyz gehört. Allein diese geht nicht durch die z Ordinate mit dem Fusspunkt $x'_1 y'_1$, sondern eine andere benachbarte, deren Lage von den willkürlichen Funktionen des Integrals des Systems II abhängt. Mithin hängt auch der fernere Verlauf der Charakteristik xyz_1 davon ab. Die Charakteristiken bilden also für ein System, wie das System I, nicht eine Kurvenschaar, deren Integralgleichungen nur Constanten statt der Differentialquotienten ihrer Differentialgleichungen enthalten, sondern ihre Gestalt hängt von will-

kürlichen Funktionen ab und hierin liegt die erwähnte Schwierigkeit.

§. 18.

Construction der Integraloberflächen des Systems I.

Ich werde hier die Construction der conjugirten Integraloberflächen des Systems I mittheilen, weil sie das analytische Problem in ein vollkommen durchsichtiges und sehr einfaches geometrisches verwandelt.

Der Einfachheit wegen nehme ich an, es seien auf der xz Ebene zwei willkürliche Kurven $z=\varphi(x)$, $z_1=\varphi_1(x)$ gezogen, von welchen die Construction auszugehen hat. Von diesen Kurven werden wir nur die zwischen den z Ordinaten für die Fusspunkte x und x_1 (später $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^{(n)}$ genannt) befindlichen Stücke gebrauchen. Wir markiren nun auf der x Axe von x an bis x_1 die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots \mathfrak{P}^{(m)}$ und bezeichnen die zu irgend einem Punkt $\mathfrak{P}^{(n)}$ gehörigen Elemente der conjugirten Charakteristiken mit $(u^{(n)}, v^{(n)})$; $(\mathfrak{u}^{(n)}, \mathfrak{v}^{(n)})$. Nun construiren wir zum Punkt $\mathfrak{P}$ das Element (u, v) (von dem wir annehmen wollen, das seine Projection auf die xy Ebene sich mit der Projection des Elements $(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}')$ in der Gegend der positiven y schneidet, und dass seine Richtung mit der Richtung $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots \mathfrak{P}^{(m)}$ einen spitzen Winkel bildet); zum Punkt $\mathfrak{P}'$ die Elemente (u', v') und $(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}')$; zum Punkt $\mathfrak{P}''$ die Elemente (u'', v'') und $(\mathfrak{u}'', \mathfrak{v}'')$ u. s. f., endlich zum Punkt $\mathfrak{P}^{(m)}$ nur das Element $(\mathfrak{u}^{(m)}, \mathfrak{v}^{(m)})$, von dem wir wieder der Bequemlichkeit halber annehmen wollen, dass es sich in der Gegend der positiven y mit dem Element $(u^{(m-1)}, v^{(m-1)})$ schneidet, und einen spitzen Winkel mit der Richtung $\mathfrak{P}^{(m)}, \mathfrak{P}^{(m-1)} \ldots \mathfrak{P}$ einschliesst. Die Projectionen der Elemente:

$$(u, v) \text{ und } (\mathfrak{u}', \mathfrak{v}')\,;\ (u', v') \text{ und } (\mathfrak{u}'', \mathfrak{v}'')\,;\ \ldots.$$
$$(u^{(m-1)}, v^{(m-1)}) \text{ und } (\mathfrak{u}^{(m)}, \mathfrak{v}^{(m)})$$

schneiden sich in einer Reihe Punkte, die wir mit

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_1'', \ldots. \mathfrak{P}_1^{(m-1)}$$

bezeichnen wollen. Genau die nämliche Construction können wir, von diesen Punkten, statt von den $\mathfrak{P}, '\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'' \ldots \mathfrak{P}^{(m)}$ ausgehend, ausführen; sie liefert uns die Fortsetzung der Projec-

tionen der Elemente der conjugirten Charakteristiken bis zu einer dritten Reihe von Punkten:

$$\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_2', \mathfrak{P}_2'', \ldots \mathfrak{P}_2^{(m-2)}$$

und durch mehrmalige Wiederholung der nämlichen Construction gelangen wir schliesslich zu den Reihen:

$$\mathfrak{P}_{m-2}, \mathfrak{P}'_{m-2}, \mathfrak{P}''_{m-2}$$
$$\mathfrak{P}_{m-1}, \mathfrak{P}'_{m-1}$$
$$\mathfrak{P}_m$$

und haben somit das Stück der Projectionen der beiden Schaaren von Charakteristiken construirt, welches eingeschlossen ist:

1) von der Linie: $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots \mathfrak{P}^{(m)}$
2) von der Charakteristik: $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_m$
3) von der Charakteristik: $\mathfrak{P}^{(m)}, \mathfrak{P}_1^{(m-1)}, \mathfrak{P}_2^{(m-2)}, \ldots \mathfrak{P}_m$.

Nur in dem Falle, wo $\frac{u}{v}$ und $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{v}}$ gleichzeitig von z und z_1 frei sind, und in einem anderen, sofort zu besprechenden Fall hängen die Projectionen der Charakteristiken auf die xy Ebene nicht von den Kurven $z=\varphi$, $z_1=\varphi_1$ ab. Nachdem diese Construction durchgeführt ist, denken wir uns den Uebergang zur Grenze in der Weise bewerkstelligt, dass der Abstand x_1-x beibehalten, die Zahl m der Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$.. aber unendlich wird. Es gehen dann die beiden sich kreuzenden Schaaren von Charakteristiken:

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_m; \quad \mathfrak{P}', \mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots \mathfrak{P}'_{m-1}; \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{P}^{(m)}, \mathfrak{P}_1^{(m-1)}, \ldots \mathfrak{P}_m; \quad \mathfrak{P}^{(m-1)}, \mathfrak{P}_1^{(m-2)}, \ldots \mathfrak{P}_{m-1}; \text{ etc.}$$

in zwei Schaaren stetiger Kurven über, deren Oerter die conjugirten Integraloberflächen sind. Allein, und dies ist wichtig, mittelst der Kurvenstücke von x bis x_1 kann nur das Stück conjugirter Integraloberflächen zwischen den Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^{(m)}$ und $\mathfrak{P}_m$ construirt werden, nur dieses ist durch die zwischen den Grenzen x und x_1 willkürlich hinzuzeichnenden Kurven $z=\varphi$ und $z_1=\varphi_1$ bestimmt.

Ausserdem ergiebt sich, dass man durch die Kurven $z=\varphi$ und $z_1=\varphi_1$ nur ein Paar conjugirter Integraloberflächen des Systems I legen kann.

Ich werde noch nachträglich nachweisen, dass wir es hier mit dem einzigen System von Charakteristiken zu thun haben,

welches das System I zulässt, d. h. mit den einzigen Kurven, deren Elemente keine Richtungsänderung erfahren, wenn man die Integraloberfläche in der Weise variirt, dass sie nicht aufhört, durch den Anfangspunkt des betrachteten Elements zu gehen. Wir nehmen an, es gebe zwei andere Richtungen $((u), (v))$ und $((\mathfrak{u}), (\mathfrak{v}))$ von conjugirten Elementen der erwähnten Eigenschaft. Da nun die eine Integraloberfläche z. B. gleichzeitig durch die Elemente (u, v) und $((u), (v))$ gehen muss, so würde eine Variation der Richtung der Normale auch eine Variation der Richtung $((u), (v))$ bedingen, wenn man nicht die Integraloberfläche so variiren kann, dass die Richtung der Normale unverändert bleibt. Dies ist nun allerdings möglich. Allein weiter unten wird gezeigt werden, dass man dadurch auf keine neuen Charakteristiken des Systems I geführt wird.

§. 19.

Ueber einen einfachen Fall bei der Construction des §. 18.

Anders verhält sich die Sache, wenn man annimmt, es sei im System I $\frac{u}{v} = \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{v}}$, in welchem Falle es »System II« heissen mag. Dann erhalten die conjugirten Charakteristikenelemente die nämlichen Projectionen auf die xy Ebene, und dies ermöglicht eine Fortsetzung ihrer Construction, ohne dass man die willkürlichen Funktionen zu kennen braucht. Denn da ihre xy Projectionen zusammenfallen, so treffen beide von conjugirten Punkten ausgehenden Elemente von Charakteristiken dieselbe z Ordinate in conjugirten Punkten. Und nun hängt ihre Fortsetzung von keiner willkürlichen Funktion mehr ab, sondern ist nur auf eine Weise möglich, da nur ein Paar conjugirter Charakteristikenelemente zu zwei conjugirten Punkten gehört. Die conjugirten Charakteristiken des Systems II hängen mithin nur von der Lage ihrer Anfangspunkte ab.

Kehren wir einen Augenblick zum System I des §. 17 zurück. Ich nenne die Projectionen der conjugirten Elemente der Charakteristiken für den Punkt z:

$$dx,\ dy,\ dz,$$

für den Punkt z_1:

$$d_1x,\ d_1y,\ d_1z_1.$$

Dann hat man für das System I:

$$\begin{aligned} dx - u dz &= 0, \\ dy - v dz &= 0, \\ d_1 x - \mathfrak{u} d_1 z_1 &= 0, \\ d_1 y - \mathfrak{v} d_1 z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dies sind die Differentialgleichungen seiner Charakteristiken, die indessen nicht in genügender Zahl zur Bestimmung der Unbekannten vorhanden sind. Wird indessen $u = \mathfrak{u}$, $v = \mathfrak{v}$ gesetzt, so folgt auch $dx = d_1 x$, $dy = d_1 y$, und die Differentialgleichungen reduciren sich auf folgende:

$$\begin{aligned} u dy - v dx &= 0, \\ u dz - dx &= 0, \\ \mathfrak{u} dz_1 - dx &= 0, \end{aligned}$$

welche die Variabeln $xyzz_1$ enthalten, und zu deren Bestimmung ausreichen. Ihre Integrale seien:

$$\begin{aligned} \alpha &= f(x, y, z, z_1), \\ \beta &= f_1(x, y, z, z_1), \\ \gamma &= f_2(x, y, z, z_1), \end{aligned}$$

so denke man sich die Constanten ausgedrückt durch die Coordinaten von zwei nicht conjugirten Punkten:

$$x', y', z'; \; x'', y'', z_1'';$$

auf den beiden Charakteristiken. Wir erhalten dann folgende sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x', y', z', z_1') &= f(x, y, z, z_1), \\ f_1(x', y', z', z_1') &= f_1(x, y, z, z_1), \\ f_2(x', y', z', z_1') &= f_2(x, y, z, z_1), \\ f(x'', y'', z'', z_1'') &= f(x, y, z, z_1), \\ f_1(x'', y'', z'', z_1'') &= f_1(x, y, z, z_1), \\ f_2(x'', y'', z'', z_1'') &= f_2(x, y, z, z_1), \end{aligned}$$

Es mögen die nicht conjugirten Punkte $x', y', z', x'', y'', z_1''$ zwei beliebigen Kurven:

$$\begin{aligned} \lambda\,(x', y', z') = 0, \quad \mu\,(x'', y'', z_1'') = 0, \\ \lambda_1(x', y', z') = 0, \quad \mu_1(x'', y'', z_1'') = 0 \end{aligned}$$

angehören. Eliminirt man aus diesen vier und den obigen sechs Gleichungen die Grössen: $x', y', z'; x'', y'', z_1''; z_1', z''$, so erhält man zwei Gleichungen zwischen den Variabeln $xyzz_1$, welche, denkt man sich daraus z und z_1 als Funktionen von x und y bestimmt, die Oerter darstellen aller conjugirten

Charakteristiken, die durch beide Kurven $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$ und $\mu = 0$, $\mu_1 = 0$ gehen. Diese Oerter sind dann offenbar zwei conjugirte Integraloberflächen, womit das Problem der Integration des System II vollständig gelöst ist.

Jacobi hat bekanntlich gezeigt, wie man das allgemeine Integral eines Systems von der Form II mit beliebig vielen Gleichungen und Variabeln finden könne. Es schien mir indessen nicht überflüssig, hier geometrisch den einfachen Fall des System II zu betrachten, weil dadurch im Resultat eine zu grosse Allgemeinheit vermieden wird, und die Bestimmung der willkürlichen Funktionen durch die Grenzbedingungen sich ohne Schwierigkeit ausführen lässt.

Bemerkung I. Hinzuzufügen ist noch, dass offenbar zwei endliche Stücke von willkürlichen Funktionen im Falle des System II kein allseitig begrenztes Stück Oberfläche bestimmen wie beim System I, da durch die den Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$... entsprechenden conjugirten Punkte der Kurven $z = \varphi$ und $z_1 = \varphi_1$ eine Schaar von conjugirten Charakteristiken ihrer ganzen Ausdehnung nach bestimmt wird.

Bemerkung II. Es giebt zum System I gehörige Formen, deren Integraloberflächen eine oder mehrere conjugirte Charakteristiken haben, die von den willkürlichen Funktionen unabhängig sind, während die Gestalt der übrigen mit den willkürlichen Funktionen variirt. Es sei das System:

$$\text{I.} \begin{cases} p + vq = w, \\ p_1 + \mathfrak{v} q_1 = \mathfrak{w}, \end{cases}$$

wo v und $\mathfrak{v}$ nur x und y enthalten, gegeben, und ich nehme an, die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = v, \ \frac{dy}{dx} = \mathfrak{v}$$

hätten eine gemeinschaftliche, gleichviel ob singuläre oder particuläre Lösung:

$$y = \varphi(x),$$

wo also y eine Wurzel der Gleichung:

$$v - \mathfrak{v} = 0$$

sein muss. Man hat dann die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dz}{dx} = p + q\,\frac{dy}{dx} = w,$$
$$\frac{dz_1}{dx} = p_1 + q_1\,\frac{dy}{dx} = \mathfrak{w},$$

wo y aus den Funktionen w und $\mathfrak{w}$ mit Hülfe der Gleichung $y = \varphi\ (x)$ entfernt zu denken ist. Deren Integrale, verbunden mit der Gleichung $y = \varphi$ der gemeinschaftlichen Projection des conjugirten Charakteristikenpaares, sind nur von zwei Parametern abhängig. Es gilt also der Satz: **Die conjugirten Integraloberflächen des Systems I haben soviel conjugirte Charakteristikenpaare als die Differentialgleichungen:**

$$\frac{dy}{dx} = v,\ \frac{dy}{dx} = \mathfrak{v}$$

gemeinsame Lösungen. Und wir wissen, dass conjugirte Charakteristiken von den willkürlichen Funktionen unabhängig sind. Es ist klar, dass diese Bemerkung sich in gewissen Fällen auf das allgemeinere System I erstreckt.

§. 20.

Das System I ist einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung äquivalent.

Das System I ist deshalb von besonderem Interesse, weil es mit linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung eng verwandt ist. Differenzirt man die Gleichung $up + vq = 1$ nach x und y, und eliminirt aus den beiden so erhaltenen Gleichungen und dem System I z_1, p_1, q_1, so erhält man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für z. Geben wir z. B. dem System I die Form:

$$up + vq = w,$$
$$\mathfrak{u}p_1 + \mathfrak{v}q_1 = \mathfrak{w},$$

und nehmen an, dass u, v, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ nur von x und y, w und $\mathfrak{w}$ dagegen von allen Variabeln abhängen; differenziren die erste Gleichung einmal nach x, das andere Mal nach y und addiren ihre Derivirten, nachdem die erste mit $\mathfrak{u}$, die zweite mit $\mathfrak{v}$ multiplicirt worden, so folgt:

$$p\left\{\mathfrak{u}u_x + \mathfrak{v}u_y - \mathfrak{u}w_z\right\} + q\left\{\mathfrak{u}v_x + \mathfrak{v}v_y - \mathfrak{v}w_z\right\} + u\mathfrak{u}r + s\,(\mathfrak{u}v + \mathfrak{v}u) + v\mathfrak{v}t$$
$$= \mathfrak{u}w_x + \mathfrak{v}w_y + \mathfrak{w}w_{z_1},$$

wo die partiellen Differentiationen durch die Indices angegeben sind. Setzt man noch:

$$w = w_1 + z_1,$$

so kann man die eben erhaltene Gleichung auf die Form:

$$Ar + Bs + Ct + Dp + Eq = F$$

bringen, in der A, B, C, D, E auf beliebige Weise nur von x und y, F dagegen von x, y, z, $p + uq$ abhängen dürfen. Denn die Coefficienten A, B, C, D, E lassen sich durch die Funktionen u, v, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, w_1 und F mittelst $\mathfrak{w}$ ausdrücken.

§. 21.

Die Contactcharakteristiken und deren allgemeine Differentialgleichungen.

Es sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

vorgelegt, so liefert das Verfahren das Gesetz der Integraloberflächen durch Variation lediglich der willkürlichen Bestandtheile des Integrals zu verändern, Durchschnittslinien der ursprünglichen und der variirten Oberfläche, die indessen keiner präzisen analytischen Definition fähig sind, da sie von den Variationen der willkürlichen Funktionen abhängen. Monge hatte den Gedanken, die Variation unter einer gewissen Bedingung geschehen zu lassen, um zu einer von den Variationen der willkürlichen Funktionen unabhängigen Durchschnittslinie zu gelangen. Diese Bedingung besteht darin, dass er in der Durchschnittslinie nicht allein die Coordinaten x, y, z ihrer Punkte und die Projectionen dx, dy, dz ihrer Elemente, sondern auch die Richtung der Normale an die Integraloberfläche mithin p und q unverändert lässt. Bei der Variation ist also:
$\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta p = 0$, $\delta q = 0$, $\delta dx = 0$, $\delta dy = 0$, $\delta dz = 0$.
Die ursprüngliche und die variirte Oberfläche tangiren sich längs der Charakteristik und es bleibt in ihr der Variation unterworfen nur r, s, t. Die Variation von $F = 0$ liefert:

$$R\delta r + S\delta s + T\delta t = 0,$$

wo:

$$R \equiv \frac{\partial F}{\partial r}, \quad S \equiv \frac{\partial F}{\partial s}, \quad T \equiv \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Nun ist:

$$dp = r dx + s dy,$$
$$dq = s dx + t dy$$

und dp z. B. ist gleich $p_1 - p$, wo p und p_1 sich auf zwei

aufeinanderfolgende Punkte $x\,y\,z$ und $x_1\,y_1\,z_1$ der Charakteristik beziehen. Daher hat man $\delta p_1 - \delta p = \delta dp = 0$, $\delta q_1 - \delta q = \delta dq = 0$, und

$$\delta r dx + \delta s dy = 0,$$
$$\delta s dx + \delta t dy = 0.$$

Die Elimination von δr, δs, δt ergiebt die Gleichung der Charakteristiken:

$$\mathfrak{R} \equiv R dy^2 - S dx dy + T dx^2 = 0.$$

Man hat im Ganzen folgende allgemeine Relationen zwischen den Differentialen der Variabeln x, y, z, p, q, r, s, t:

$$\left.\begin{aligned} dz &= p dx + q dy && 1)\\ dp &= r dx + s dy && 2)\\ dq &= s dx + t dy && 3)\\ dr &= \mathfrak{a} dx + \mathfrak{b} dy && 4)\\ ds &= \mathfrak{b} dx + \mathfrak{c} dy && 5)\\ dt &= \mathfrak{c} dx + \mathfrak{d} dy && 6)\end{aligned}\right\} D,$$

wo mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die vier dritten Differentialquotienten von z nach x und y bezeichnet sind. Die Differentiation nach x und y der Gleichung $F=0$ ergiebt:

$$R\mathfrak{a} + S\mathfrak{b} + T\mathfrak{c} + \Pi = 0,$$
$$R\mathfrak{b} + S\mathfrak{c} + T\mathfrak{d} + \Pi_1 = 0,$$

wo:

$$\Pi = Pr + Qs + X + pZ,$$
$$\Pi_1 = Ps + Qt + Y + qZ.$$

Aus diesen Gleichungen mit Hülfe der obigen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ eliminirt folgt wegen $\mathfrak{R} = 0$:

$$\left.\begin{aligned} R dr dy + T ds dx + \Pi dx dy &= 0 && 1)\\ R ds dy + T dt dx + \Pi_1 dx dy &= 0 && 2)\end{aligned}\right\} \mathfrak{R}_1.$$

Die Gleichungen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, D 1) 2) 3) sind die 6 Gleichungen, die man für die Charakteristiken erhalten kann. Addirt man die beiden Gleichungen $\mathfrak{R}_1$, nachdem man die erste mit dx, die zweite mit dy multiplicirt, und zieht vom Resultat $\mathfrak{R} ds$ ab, so erhält man $dF.dx dy = 0$ oder $dF = 0$. Ist die Gleichung $F = 0$ linear, d. h. hat sie die Form:

$$F_l \equiv Rr + Ss + Tt - U = 0,$$

wo R, S, T, U Funktionen von x, y, z, p, q sein können, so kann man die Gleichungen der Charakteristik ein wenig modificiren. Die Elimination von r, s, t aus den Gleichungen D 2), D 3), F_l liefert wegen $\mathfrak{R} = 0$:

$$\mathfrak{R}_l \equiv Rdpdy + Tdqdx - Udxdy = 0.$$

Man hat also in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_l$ und D 1) drei Gleichungen, die nur die fünf Variabeln x, y, z, p, q enthalten. Diese letzteren liegen bekanntlich der Monge–Ampère'schen Theorie zu Grunde. An ihre Stelle treten aber auch bei den linearen Gleichungen, wenn es sich um die allgemeinen Gleichungen der Charakteristik handelt, die 6 Gleichungen: $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ 1) und 2), D 1), 2), 3).

Bemerkung. Ich bemerke noch, dass man mit den Gleichungen: $F=0$ und $dF=0$ eine der Variabeln x, y, z, p, q, r, s, t eliminiren kann. Man behält dann ihrer 7, und die fünf Gleichungen: $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ 1), D 1), 2), 3). Findet man noch eine Bedingung, der man die Charakteristiken genügen lassen kann, so ist der Einfluss der willkürlichen Funktionen auf ihre Gestalt beseitigt, und man würde ihre Gleichungen mit 6 willkürlichen Parametern erhalten. Wir werden in der Folge den Nutzen dieser Bemerkung erkennen.

§. 22.

Ueber die Charakteristiken des vollständigen Integrals von $F^{II}=0$.

Unter den Integralen mit willkürlichen Constanten der vollständigen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ ist es das mit fünf Constanten:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta) = 0,$$

welches, wenn irgend eines, den Namen des vollständigen Integrals verdient, deshalb, weil man, gleichviel welches seine Zusammensetzung sei, zu jener vollständigen Differentialgleichung gelangt durch Elimination der fünf Parameter aus der Gleichung $f=0$ und deren Derivirten nach x, y, xx, xy, yy. Wir wollen hier die Gleichungen der Charakteristiken der Integraloberflächen $f=0$ aufsuchen, die offenbar nicht von willkürlichen Funktionen abhängen, sondern ausser den Parametern α, β, ... deren nur noch einen enthalten können. Setzen wir:

$$\delta f \equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta,$$

so ist:

$$\delta f = 0$$

eine erste Gleichung der Charakteristiken. Zwei andere sind nach dem Vorigen:

$$\delta p = 0,\ \delta q = 0,$$

wo

$$p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}},\ q = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

und die letzte Gleichung ergiebt sich durch Elimination von dx, dy aus den Gleichungen:

$$\delta r dx + \delta s dy = 0,$$
$$\delta s dx + \delta t dy = 0.$$

Sie lautet:

$$\delta s^2 - \delta r \delta t = 0,$$

wo r, s, t ebenfalls auf bekannte Weise aus den Differentialquotienten von f gebildet zu denken sind. Aus diesen vier Gleichungen: $\delta f = 0$, $\delta p = 0$, $\delta q = 0$, $\delta s^2 - \delta r \delta t = 0$ hat man drei der Verhältnisse $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\gamma}{d\alpha}$, $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$, $\frac{d\zeta}{d\alpha}$ zu eliminiren und das Zurückbleibende als einen neuen Parameter c anzusehen. Die Elimination liefert dann eine Gleichung von der Form:

$$c^2 + Ac + B = 0,$$

welche gleichzeitig mit $f = 0$ dem Doppelsystem der Monge'schen Charakteristiken auf $f = 0$ angehört. Die Gleichungen der Charakteristiken hängen somit von den 6 Parametern α, β, γ, ε, ζ und c ab.

Enthält das Integral $f = 0$ eine geringere Anzahl als fünf willkürliche Constanten, so wird diese ganze Betrachtung illusorisch.

§. 23.

Eintheilung der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach ihren Charakteristiken.

Aus der Gleichung

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0,$$

folgt:

$$2Rdy = dx\{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}\}.$$

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerfallen also ganz naturgemäss erstens in solche, für die $S^2 - 4RT$ wesentlich positiv ist. Diese haben zwei Schaaren von Contactcharakteristiken.

Dann in solche, für die $S^2 - 4RT = 0$ ist. Die zu dieser Klasse gehörigen Differentialgleichungen erhält man durch Elimination von α aus den Gleichungen:

$$r + 2\alpha s + \alpha^2 t = 2\,\varphi\,(x, y, z, p, q, \alpha),$$
$$s + \alpha t = \frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi\,(x, y, z, p, q, \alpha),$$

wo φ eine willkürliche Funktion aller ihrer Argumente ist, oder man erhält sie durch Elimination von α aus den Gleichungen:

$$0 = s^2 - (r+\alpha)\ (t+\beta),$$
$$0 = (t+\beta)\,d\alpha + (r+\alpha)\,d\beta,$$

wo β wieder eine willkürliche Funktion von x, y, z, p, q, α vorstellt*). Diese Klasse von Differentialgleichungen hat nur **eine** Schaar von Charakteristiken.

Endlich kann $S^2 - 4RT$ negativ sein. Dann hat die Differentialgleichung keine Contactcharakteristiken, und die Integrationsmethoden, mit Hülfe deren man die Integraloberflächen als Oerter der Contactcharakteristiken auffinden würde, müssten im letzteren Falle Integrale mit imaginären Symbolen liefern.

Enthält F r und t nicht, hat es also die Form:

$$s = \varphi\,(x, y, z, p, q),$$

so ist es nicht überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, dass alsdann aus

$$\mathfrak{R} \equiv dx dy = 0$$

geschlossen werden muss, es sei $dx = 0$ die Differentialgleichung der Projection der einen Schaar und $dy = 0$ diejenige der Projection der anderen Schaar Charakteristiken. Gemäss einer schon angewandten und später noch ausdrücklich zu rechtfertigenden Bezeichnungsweise, haben wir für die Projectionen der Charakteristiken in diesem Falle:

---

*) Da diese Formen, welche wir als der Gleichung $S^2 - 4RT = 0$ allgemein genügend angegeben haben, allerdings sämmtliche partikulären Integrale, nur nicht diejenigen, aus denen sie entstanden sind, enthalten (nach einer Bemerkung von Lagrange, die im folgenden Theil dieser Untersuchungen zur Sprache kommen wird), so muss man die betreffenden partikulären Integrale noch hinzufügen. Es sind folgende:

$$r + 2\varphi s + \varphi^2 t = \varphi_1$$
$$0 = s^2 - (r + \varphi)\ (t + \varphi_1)$$

wo φ und φ_1 willkürliche Funktionen von x, y, z, p, q sind.

$$dx = 0,\ d_1y = 0$$

oder:

$$x = c,\ y = c_1,$$

so dass die Projectionen der Contactcharakteristiken auf die xy Ebene zwei Schaaren von Geraden sind, die eine der x Axe, die andere der y Axe parallel. Die Gleichung:

$$dz = pdx + qdy$$

giebt dann für beide Schaaren:

$$d_1z = pd_1x,$$
$$dz = qdy$$

und wegen

$$s = \varphi(x, y, z, p, q)$$

kommen noch die Gleichungen:

$$d_1q = \varphi d_1x,$$
$$dp = \varphi dy$$

hinzu, die sechs Gleichungen:

$$dx = 0, \quad d_1y = 0,$$
$$dz = qdy, \quad d_1z = pd_1x,$$
$$dp = \varphi dy, \quad d_1q = \varphi d_1x$$

sind dann die Gleichungen der beiden Charakteristikenschaaren der Gleichung $s = \varphi$.

§. 24.

Zusammenhang der Contactcharakteristiken mit denjenigen des Systems I (§. 18).

Eliminirt man z_1, p_1, q_1 aus den Gleichungen:

$$up + vq = 1,$$
$$\mathfrak{u}p_1 + \mathfrak{v}q_1 = 1,$$

so folgt eine Gleichung von der Form:

$$u\mathfrak{u}r + s(u\mathfrak{v} + v\mathfrak{u}) + v\mathfrak{v}t = U,$$

wo U eine Funktion von x, y, z, p, q bedeutet. Die Differentialgleichung der Contactcharakteristiken dieser Gleichung wird:

$$u\mathfrak{u}dy^2 - (u\mathfrak{v} + v\mathfrak{u})\,dxdy + v\mathfrak{v}t\,dx^2 = 0,$$

welche ein Produkt der beiden Gleichungen:

$$udy - vdx = 0,$$
$$\mathfrak{u}d_1y - \mathfrak{v}d_1x = 0,$$

ist, derselben, welche nach §. 19 die Gleichungen der Projectionen der im §. 18 beschriebenen Charakteristiken des Systems I

vorstellen. Die letzteren sind demnach mit den Contactcharakteristiken identisch, und es folgt noch der Satz, dass die beiden conjugirten Integraloberflächen des Systems I congruente Projectionen ihrer Contactcharakteristiken haben.

§. 25.

Einige Transformationen.

Ich werde hier noch einige Transformationen angeben, durch welche bekannte lineäre partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den Gleichungen von der Form des Systems I in Zusammenhang treten.

Setzen wir:

$$p + vq = \pi,$$
$$p + \mathfrak{v}q = \pi_1,$$

wo π und π_1 neue Variabeln bedeuten, dann ist:

$$r + vs = \frac{\partial \pi}{\partial x} - q \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$s + vt = \frac{\partial \pi}{\partial y} - q \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Diese beiden Gleichungen addirt, nachdem man der zweiten einen Factor u gegeben hat, kommt:

$$C \equiv r + s(u+v) + uvt = \frac{\partial \pi}{\partial x} + u \frac{\partial \pi}{\partial y} - q\left(\frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Setzt man C gleich irgend einer Funktion von $xypq$, und macht

$$u + v = A,$$
$$uv = B,$$

wo A und B nur Funktionen von xy vorstellen, und setzt dann $\mathfrak{v} = u$, so hat man statt der Differentialgleichung:

$$C = r + As + Bt$$

folgendes System zu integriren,

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} + u \frac{\partial \pi}{\partial y} = C - \frac{\pi - \pi_1}{u - v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x} + v \frac{\partial \pi_1}{\partial y} = C - \frac{\pi - \pi_1}{u - v}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad 1)$$

Für $\frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ z. B. reducirt sich die erste auf eine lineäre partielle erster Ordnung. Es sind u und v die trigonometrischen Tangenten der Neigungen der Elementprojectionen der Monge'schen Charakteristiken für die Gleichung $C = r + As + Bt$ gegen die xAxe. Wird C gleich Null gesetzt, so erhalten vorstehende Gleichungen die symmetrische Form:

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial x} + u\frac{\partial \pi}{\partial y}}{\pi - \pi_1} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y}}{v - u},$$
$$\frac{\frac{\partial \pi_1}{\partial x} + v\frac{\partial \pi_1}{\partial y}}{\pi - \pi_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y}}{v - u}. \qquad 2)$$

Die Form

$$p + \varphi(z, z_1)\, q = 0,$$
$$p_1 + \varphi_1(z, z_1)\, q_1 = 0 \qquad 3)$$

führt auf die andere

$$p + \varphi(x, y)\, p_1 = 0,$$
$$q + \varphi_1(x, y)\, q_1 = 0 \qquad 4)$$

und diese, wenn man $z + \varphi z_1 = \zeta$, $z + \varphi_1 z_1 = \zeta_1$ setzt, führt auf die symmetrische Form:

$$\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\zeta - \zeta_1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi - \varphi_1},$$
$$\frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}}{\zeta - \zeta_1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\varphi - \varphi_1}. \qquad 5)$$

Man kann ein System von der Form:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = (\zeta - \zeta_1)\, U,$$
$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = (\zeta - \zeta_1)\, V, \qquad 6)$$

wo U und V beliebige Funktionen von x und y, nicht ohne Weiteres auf die Form 5) bringen. Statt auf das System 2) (welches durch eine auf der Hand liegende Substitution in die Form 6) übergeführt werden kann), lässt sich aber die Gleichung $r + As + Bt = 0$ doch auf die Form 5) bringen, unter andern auf folgende Weise: Man denke sie sich, was bekanntlich immer möglich, in folgende Differentialgleichung

$$\varrho + \psi(p, q)\, \sigma + \psi_1(p, q)\, \tau = 0$$

verwandelt, wo ψ und ψ_1 aus A und B entstanden sind, indem man p und q für x und y geschrieben hat, und p, q, ϱ, σ, τ die Differentialquotienten von einer neuen Variabeln ζ nach x und y sind. ζ ist mit z durch die Gleichung $z + \zeta = xp + yq$ verbunden*). Es sei nun:

*) Diese Substitution rührt von LEGENDRE her, und findet sich in seiner Abhandlung Sur l'Equation de la moindre Surface, Par. Mém. 1787, S. 309. AMPÈRE hat ihr noch einige ähnliche Substitutionen hinzugefügt, die

$$\lambda = \varphi(p, q),$$

eine neue Variabele. Durch Differentiation der Gleichung $\lambda = \varphi$ folgt:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} r + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} s + \frac{\partial \varphi}{\partial q} t.$$

Die zweite Gleichung mit einem Factor ξ multiplicirt und beide Gleichungen addirt, folgt:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \xi \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} r + s\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial q} t.$$

Sind

$$\xi \text{ und } \lambda = \varphi(p, q),$$

$$\xi_1 \text{ und } \lambda_1 = \varphi_1(p, q).$$

die beiden simultanen Paare von Lösungen der Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \psi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

so sind also die λ's die Integrale des Systems:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \xi \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = 0,$$

wo in ξ, ξ_1 für p und q aus $\lambda = \varphi$, $\lambda_1 = \varphi_1$ die Variabeln λ und λ_1 substituirt zu denken sind. Dieses System hat dann die Form

---

häufig sehr gute Wirkung thun: Application de la théorie, etc. 48 Cah. de l'Ec. Polyte. S. 88. Man kann diese Substitutionen zusammenfassen wie folgt: Führt man in die Gleichung:

$$Rr + 2Ss + Tt + A(s^2 - rt) + U = 0$$

1) $\zeta = z - xp - yq$ (die Argumente sind p und q, $\frac{\partial \zeta}{\partial p} = -x$, $\frac{\partial \zeta}{\partial q} = -y$),

2) $\zeta_1 = z - xp$ (die Argumente sind p und y, $\frac{\partial \zeta_1}{\partial p} = -x$, $\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = q$),

3) $\zeta_2 = z - qy$ (die Argumente sind x und q, $\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \zeta_2}{\partial q} = -y$)

ein, so geht sie über in;

1) $T\varrho - 2S\sigma + R\tau + A + U(\sigma^2 - \varrho\tau) = 0,$

2) $A\varrho_1 + 2S\sigma_1 + U\tau_1 + T - R(\sigma_1^2 - \varrho_1\tau_1) = 0,$

3) $U\varrho_2 - 2S\sigma_2 - A\tau_1 - R + T(\sigma_2^2 - \varrho_2\tau_2) = 0.$

Wo die Coefficienten R, etc. nicht verändert sind und die griechischen Buchstaben ϱ, etc. die Ableitungen der ζ nach ihren Argumenten bedeuten, z. B. $\varrho = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2}$, $\sigma_1 = \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial p \partial y}$, $\tau_2 = \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial q^2}$, etc. ist.

3), die auf die Form 5) führt. Die φ's sind übrigens die beiden Integrale der Gleichung:

$$1+\psi\frac{dq}{dp}+\psi_1\left(\frac{dq}{dp}\right)^2=0$$

und λ und λ_1 sind die Integrationsconstanten dieser Integrale.

VI. Construction der Integraloberflächen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir werden die Titelaufgabe erfüllen, indem wir uns nicht der Charakteristiken bedienen, sondern wir werden die Integraloberflächen als Enveloppen von Abwickelbaren darstellen.

§. 26.

Die Gleichung $F(x, y, z, p, q, r, s) = 0$.

Wir beginnen mit der Construction der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s) = 0,$$

in der also t fehlt.

Setzen wir $p = z_1$ und sehen z_1 als eine neue Variabele an, so folgt das System:

$$F(x, y, z, z_1, q, p_1, q_1) = 0$$
$$p = z_1.$$

Wir haben also die zwei conjugirten Oberflächen $z = f(x, y)$, $z_1 = f_1(x, y)$, zu construiren. Zu diesem Zweck führen wir statt der Grössen p, q, p_1, q_1 die Neigungstangenten

$$\frac{\xi-x}{\zeta-z}, \frac{\eta-y}{\zeta-z}; \frac{\xi_1-x}{\zeta_1-z_1}, \frac{\eta_1-y}{\zeta_1-z_1}$$

der Normalen an die conjugirten Punkte der beiden Oberflächen ein. Die Gleichung $F = 0$ schreiben wir nicht weiter hin, die Gleichung $p = z_1$ aber wird:

$$\xi - x = z_1(\zeta - z)$$

und bedeutet, dass für ein gegebenes z_1 die Projection auf die xz Ebene der Normale an den Punkt z eine feste ist. Daher entspricht dem Punkt z ein Normalenstrahlenfächer, der senkrecht auf der xz Ebene steht, und das Loth auf diesen Fächer, nämlich das zum Punkt z gehörige Element der Charakteristik

der Oberfläche $z = f(x, y)$, dieses Loth liegt in einer Parallelen zur xz Ebene. Wählt man einen bestimmten Strahl des Fächers z, so erhält auch q einen festen Werth, und dann entspricht dem Punkt z_1 ein Normalenkegel. Es ist also jedem Strahl des Normalenfächers z ein Normalenkegel z_1 conjugirt. Diesem Normalenkegel z_1 entspricht ein Polarkegel z_1, der der charakteristische Kegel der Oberfläche $z_1 = f_1(x, y)$ ist. Ich werde nun zeigen, wie man mit Hülfe dieser Elemente und zweier gegebener willkürlicher Funktionen die Integraloberfläche $z = f(x, y)$ construiren kann. Zu diesem Zweck nehme ich auf der zy Ebene zwei willkürliche Kurven $z = \varphi(y)$, $z_1 = \varphi_1(y)$ an. Ich markire zunächst zwei conjugirte Punkte auf beiden. Der Punkt z_1 bestimmt die Lage der vom Punkt z entspringenden Charakteristik. Die Grösse q wird dadurch bestimmt, dass der Normalenfächerstrahl gleichzeitig senkrecht auf der Charakteristik und auf dem, an den Punkt z stossenden Elemente der Kurve $z = \varphi(y)$ stehen muss, da die Integraloberfläche, deren Normalen Strahlen der Normalenfächer sein sollen, durch die Kurve $z = \varphi(y)$ zu legen ist. Da die Normale an den Punkt z hierdurch bestimmt ist, so ist es auch der Normalenkegel z_1. Ich denke mir in derselben Weise für alle conjugirten Punkte der beiden Kurven die Normalen z und die Normalenkegel z_1 construirt.

Legt man gegenwärtig durch alle Punkte der Kurve $z = \varphi(y)$ Ebenen, senkrecht zu den diesen Punkten zugehörigen Normalen z, so werden alle diese Ebenen eingehüllt von einer abwickelbaren Oberfläche, welche in der Kurve $z = \varphi(y)$ die Integraloberfläche $z = f(x, y)$ tangirt.

Betrachten wir ferner die Kurve $z_1 = \varphi_1(y)$, zu deren sämmtlichen Punkten wir die Normalenkegel construirt hatten. Wir können mit Hülfe dieser Kegel eine oder mehrere abwickelbare Oberflächen durch die Kurve $z_1 = \varphi(y)$ legen, welche in dieser Kurve die Oberfläche $z_1 = f_1(x, y)$ tangiren.

Dies geschieht auf folgende Weise. Wir legen durch die aufeinanderfolgenden Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ... der Kurve $z_1 = \varphi_1(y)$ Ebenen, die auf der Kurve senkrecht sind und welche die für die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ... als Spitzen construirter Normalenkegel in einem oder mehreren Strahlen schneiden werden. Betrachtet

man nun eine Reihenfolge $s, s_1, s_2 \ldots$ dieser geschnittenen Strahlen, legt durch den Punkt $\mathfrak{P}$ eine Ebene senkrecht auf den Strahl s, durch den Punkt $\mathfrak{P}_1$ eine Ebene senkrecht auf s_1 u. s. f., so werden alle diese Ebenen von der in Rede stehenden Abwickelbaren eingehüllt.

So haben wir zwei conjugirte abwickelbare Oberflächen durch die Kurven $z=\varphi$, $z_1=\varphi_1$ gelegt, welche den Beginn der Construction bilden. Deren Fortsetzung liegt nun auf der Hand. Wir nehmen nämlich in der Entfernung Δx von der yz Ebene eine ihr parallele Ebene an, welche von den beiden conjugirten abwickelbaren Oberflächen in zwei neuen Kurven $z'=\varphi'$; $z_1'=\varphi_1'$ getroffen wird. Nun construiren wir zu diesen neuen Kurven in derselben Weise, wie so eben, zwei neue abwickelbare Oberflächen, welche in den neuen Kurven die Oberflächen $z=f(x, y)$ und $z_1=f_1(x, y)$ tangiren. Dann gehen wir zu einer dritten Ebene in der Entfernung $2\Delta x$ über, auf welcher die neuen conjugirten Abwickelbaren die Kurven $z''=\varphi''$, $z_1''=\varphi_1''$ bestimmen, u. s. f. und bekommen so zwei Schaaren von conjugirten Abwickelbaren, welche eingehüllt werden von den Oberflächen $z=f(x, y)$, $z_1=f_1(x, y)$.

Die letztere ist nur eine Hülfsoberfläche und nicht weiter zu gebrauchen und die willkürlichen Funktionen, welche, wie wir nun klar erkennen, zur Bestimmung der Oberfläche $z=f(x, y)$ nothwendig und ausreichend sind, bestehen aus der Kurve $z=\varphi(y)$, durch welche diese Oberfläche gehen soll, und dem willkürlichen Werthe von p $(=z_1)$ in dieser Kurve. Es ist also willkürlich an der Integraloberfläche der Gleichung $F(x, y, z, p, q, r, s)=0$ eine Kurve, durch welche man sie gehen lässt, und die Neigung ihrer Tangentialebene beim Durchgang durch diese Kurve.

§. 27.

Ueber die Construction der Gleichung: $F(x, y, p, q, r, s, t)=0$.

In der also z fehlt. Wir setzen $p=z_1$, $q=z_2$, $r=p_1$, $s=q_1=p_2$, $t=q_2$ und erhalten die simultanen Gleichungen:

$$F(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1 \text{ oder } p_2, q_2)=0$$
$$q_1=p_2.$$

Dann nehmen wir auf der yz Ebene die beiden willkürlichen Kurven $z_1 = \varphi_1(y)$, $z_2 = \varphi_2(y)$ an. Für je zwei conjugirte Punkte z_1 und z_2 dieser beiden Kurven sind die zugehörigen p_1, q_1; p_2, q_2 der Normalen an die durch sie gehenden Integraloberflächen: $z_1 = f_1(x, y)$, $z_2 = f_2(x, y)$ der beiden simultanen Gleichungen $F = 0$ und $p_2 = q_1$, einmal durch diese beiden Gleichungen, und dann durch die Gleichungen

$$dz_1 = p_1 dy, \quad dz_2 = p_2 dy$$

bestimmt. Da nun die Lage der conjugirten Normalen eine feste ist, so kann man auf die mehrfach angegebene Weise durch beide Kurven $z_1 = \varphi_1$, $z_2 = \varphi_2$ solche Abwickelbare legen, welche in diesen Kurven die Flächen $z_1 = f_1$, $z_2 = f_2$ tangiren. Diese Abwickelbaren schneiden eine in der Entfernung $\varDelta x$ zu der yz Ebene parallel construirte Ebene in zwei neuen Kurven $z_1' = \varphi_1'$, $z_2' = \varphi_2'$, mit denen man genau wie mit den ersten zu verfahren hat, um zwei neue Abwickelbare zu erhalten, u. s. f. Alle diese Abwickelbaren werden dann von den Oberflächen $z_1 = f_1$, $z_2 = f_2$ eingehüllt. Aus diesen ergiebt sich aber durch Quadratur die Oberfläche $z = f$. Die willkürlichen Funktionen sind also diesesmal die Anfangswerthe von p und q.

§. 28.

Ueber die Construction der Gleichung: $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$.

An der Stelle dieser betrachten wir nun endlich das System:

$$F(x, y, z, z_1, z_2, p_1, q_1 \text{ oder } p_2, q_2) = 0,$$
$$q_1 = p_2,$$
$$z_1 = p,$$
$$z_2 = q.$$

Die zweite Gleichung ist eine Folge der beiden letzten. Nimmt man auf der yz Ebene wieder zwei Kurven $z_1 = \varphi_1(y)$, $z_2 = \varphi_2(y)$ willkürlich an, so ergiebt sich wegen $z_2 = q$ daraus die dritte $z = \varphi(y)$, an der nur ein Punkt willkürlich ist. Und mit Hülfe der Gleichungen $dz_1 = q_1 dy$, $dz_2 = q_2 dy$ kann man nun auch durch die drei Kurven $z = \varphi$, $z_1 = \varphi_1$, $z_2 = \varphi_2$ drei Abwickelbare legen, welche die drei Integraloberflächen: $z = f(x, y)$, $z_1 = f_1(x, y)$, $z_2 = f_2(x, y)$ tangiren, und die Construction lässt sich dann fortsetzen wie die früheren. Es sind

mithin auch hier willkürlich nur die Funktionen $z_1 = \varphi_1$ und $z_2 = \varphi_2$ oder p und q für die Anfangswerthe. Man übersieht übrigens leicht, dass man auch als willkürlich hätte annehmen können, z. B. $z = \varphi$ und $z_1 = \varphi_1$, woraus sich eine Bestimmung für $z_2 = \varphi_2$ ergeben haben würde. Im Allgemeinen zeigt sich also Folgendes. Die Integraloberflächen der Gleichungen von der Form:

$$F\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0$$

sind bestimmt, wenn neben einer gegebenen Kurve, durch welche sie gehen müssen, auch noch die Lage ihrer Tangentialebene in dieser Kurve gegeben ist.

§. 29.

Ueber die Construction eines Systems von zwei Differentialgleichungen.

Das allgemeine System:

$$F\,(x,\ y,\ z,\ z_1,\ p,\ q,\ p_1,\ q_1) = 0,$$
$$F_1\,(x,\ y,\ z,\ z_1,\ p,\ q,\ p_1,\ q_1) = 0$$

gehört seiner Natur nach zu den partiellen Gleichungen zweiter Ordnung, weshalb die Construction seiner Integraloberflächen $z = f\,(x,\ y)$, $z_1 = f_1\,(x,\ y)$ hier noch folgen soll.

Diese ist ausserordentlich einfach, wenn man nur die Bedingung erfüllen will, dass die beiden Oberflächen durch zwei gegebene Grenzkurven $z = \varphi(y)$, $z_1 = \varphi_1(y)$ auf der yz Ebene gehen sollen. Denn alsdann bestimmen die beiden Gleichungen $F = 0$ und $F_1 = 0$ im Verein mit den Gleichungen $dz = q dy$, $dz_1 = q_1 dy$ die Grössen p, q, p_1, q_1 und diess reicht aus, um die tangirenden Abwickelbaren zu construiren.

Man kann aber auch die Bedingung aufstellen, dass die Oberfläche $z = f\,(x,\ y)$ unter gegebener Neigung durch die gegebene Kurve $z = \varphi(y)$ auf der yz Ebene gehe. Dann ist in dieser Ebene z, p, q gegeben, und daraus folgt eine Differentialgleichung für $z_1 = \varphi_1(y)$ durch Elimination von p_1 aus den Gleichungen $F = 0$, $F_1 = 0$. Durch beide Kurven $z = \varphi$, $z_1 = \varphi_1$ kann man nun wieder Abwickelbare legen, welche eine um Δx entfernte Parallelebene der yz Ebene in zwei Kurven $z' = \varphi'$,

$z_1' = \varphi_1'$ treffen, und diese hat man dann als Ausgangskurven zu behandeln, d. h. die Gleichungen:

$$F(\Delta x, y, z', z_1', p', q', p_1', q_1') = 0,$$
$$F_1(\Delta x, y, z', z_1', p', q', p_1', q_1') = 0,$$
$$dz' = q' dy,$$
$$dz_1' = q_1' dy,$$

bestimmen die Grössen p', q', p_1', q_1', welche zur Construction der neuen Abwickelbaren dienen, u. s. f.

Dritter Abschnitt.

Interpretation des Integrals der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Voraussichtlich wird die Ermittelung des Gesetzes von Integraloberflächen immer hinauskommen auf das Aufsuchen von Kurven, die jenen Oberflächen angehören, und sie bei Variation eines Parameters nicht verlassen. Wir haben schon in den §§. 16, 19 gewisse partielle Differentialgleichungen kennen gelernt, deren Integraloberflächen die Oerter von Kurvenschaaren sind, die durch Variation von Parametern entstehen, und deren Gestalt von keiner willkürlichen Funktion abhängt. Solche partielle Differentialgleichungen lassen sich immer mit Hülfe eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen integriren. Während wiederum andere, und zwar die grössere Mehrzahl der partiellen Differentialgleichungen auf ihren Integraloberflächen kein Kurvensystem haben, dessen Individuen nicht unter dem Einfluss der willkürlichen Funktionen des Integrals stünden. Solche partielle Differentialgleichungen aufzulösen, existirt noch keine allgemeine Methode.

Ist nun eine partielle Differentialgleichung so beschaffen, dass ihre Integraloberflächen Oerter von Kurven sind, die nur nach Parametern variiren, so bilden diese gleichsam das Gerippe des Integrals, und die individuelle Gestalt einer Integraloberfläche ist offenbar accessorisch. Eine ähnliche Bemerkung, welche Monge bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ machte, hat ihn veranlasst, jene Kurven Charakteristiken zu nennen. Es ist auch klar, dass man unter der Annahme der Existenz eines Charak-

teristikensystems das Gesetz der Integraloberfläche in der Weise variabel denken denken kann, dass die ursprüngliche und die veränderte Integraloberfläche durch dieselbe Charakteristik gehen. Dies kommt darauf hinaus, dass man in der Differentialgleichung die Differentialquotienten p, q, r, s, t etc. entweder alle oder zum Theil variabel, die Variabeln xyz und die Projectionen dx, dy, dz des Elements der Charakteristik aber als unveränderlich ansieht. Es sei z. B. die lineäre Gleichung:

$$Ap+Bq=1.$$

gegeben, so giebt die Variation von p und q:

$$A\delta p+B\delta q=0.$$

Aus $dz=pdx+qdy$ folgt noch:

$$dx\delta p+dy\delta y=0.$$

Und durch Elimination von δp und δq findet man $Ady-Bdx=0$. Da dies nun der Nenner der Auflösungen der Gleichungen:

$$Ap+Bq=1,$$
$$pdx+qdy=dz$$

nach p und q ist, so müssen auch deren Zähler verschwinden, was noch eine Gleichung, wies dies ausreicht, liefert. Ebenso geben die Gleichungen des §. 19, nämlich:

$$up+vq=w,$$
$$up_1+vq_1=w_1,$$
$$pdx+qdy=dz,$$
$$p_1dx+q_1dy=dz_1$$

durch Variation von p und q und p_1 und q_1 und Elimination der Variationen:

$$udy-vdx=0.$$

Dies ist wiederum der Nenner der Auflösungen jener vier Gleichungen nach p, q, p_1, q_1. Setzt man auch die Zähler gleich Null, so kommen noch, wie ausreichend und erforderlich, die zwei Gleichungen:

$$wdx-udz=0,$$
$$w_1dx-udz_1=0.$$

Variirt man endlich p und q in:

$$F(x, y, z, p, q)=0,$$
$$pdx+qdy=dz,$$

so folgt:

$$P\delta p + Q\delta q = 0,$$
$$\delta p dx + \delta q dy = 0$$

und dies giebt:

$$P dy - Q dx = 0,$$

die bekannte Gleichung der Charakteristiken der Gleichung $F=0$. Diese Methode der Herleitung der Gleichung der Charakteristiken empfiehlt sich zwar auf den ersten Blick durch Einfachheit, indessen abgesehen davon, dass dabei noch manches dunkel bleibt, ist sie nicht geeignet, die Integraloberflächen zu construiren und zu classificiren. Der richtigste Weg bei der geometrischen Behandlung von Differentialgleichungen scheint mir vielmehr der zu sein, die Bedeutung der Differentialgleichung zu ermitteln und deren Integrale auf dieser Bedeutung fussend aus Linien oder Flächenelementen zu construiren. Die Bedeutung der Gleichung $F=0$ ist im ersten Theile dieser Abhandlung dargelegt worden. Die andere Aufgabe wird der Gegenstand dieses dritten Abschnittes sein.

VII. Integralcharakteristiken und Integralconoide.

§. 30.

Allgemeines über die Charakteristiken der Gleichung $F=0$. Definition der Integralcharakteristiken.

Wir haben (§. 11) Charakteristiken der Gleichung $F=0$ genannt alle Kurven, deren Gleichungen die totale Differentialgleichung $\Phi(x, y, z, x', y')=0$ erfüllen, die durch Elimination von p und q aus den Gleichungen $F=0$, $Py'-Qx'=0$, $px'+py'=1$ erhalten wird. Es wird nöthig sein, hier eine Unterscheidung eintreten zu lassen, von der in diesem §. die Rede sein soll.

Die Normalen an alle Integraloberflächen, welche durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{P}$ gehen können, bilden den Kegel $F=0$, dessen Spitze der Punkt $\mathfrak{P}$ ist. Construirt man zu dem Kegel $F=0$ den Polarkegel $\Phi=0$, so ist dieser Polarkegel selbst gleichsam eine Integraloberfläche, wenigstens in der unmittelbaren Nähe seiner Spitze. Seine Strahlen sind die Elemente der Charakteristiken (§. 11).

Wir wollen nun zunächst untersuchen, wie viel Charakte-

ristiken man durch jeden Punkt einer Integraloberfläche legen kann, und dann prüfen, ob jede der Gleichung $\Phi=0$ genügende Charakteristik auf einer Integraloberfläche liegen kann, in welchem Falle in die Gleichung der Charakteristiken eine willkürliche Funktion einginge (§. 12).

Der erste Punkt ist schnell zu erledigen. Der Polarkegel, den man für jeden Punkt einer Integraloberfläche construirt, berührt nämlich dieselbe in der Nähe seiner Spitze, und zwar im Allgemeinen nur mit einem Strahl. Geht man auf diesem Strahl bis zu einem der Kegelspitze sehr nahen Punkt, so bleibt man auf der Integraloberfläche, und construirt man nun zu dem benachbarten Punkt wieder den Polarkegel, so berührt dieser wiederum die Oberfläche in einem Strahl, auf welchem man zu einem dritten Punkt gelangt, etc. Man kann daher durch einen Punkt einer Integraloberfläche nur eine Charakteristik legen.

Die zweite Frage wollen wir zunächst analytisch behandeln.

Zu dem Zweck betrachten wir irgend eine Kurve auf einer Integraloberfläche. Geht man auf einer solchen Kurve von einem Punkt zum andern über, so entspricht dies einer totalen Differentiation der Gleichung $F=0$. Sehen wir wie bisher z als Argument an, so giebt dies:

$$DF=Pp'+Qq'+Xx'+Yy'+Z=0\text{*)}.$$

Es ist aber

$$p'=rx'+sy',$$
$$q'=sx'+ty'$$

und durch partielle Differentiation der Gleichung $F=0$ findet man:

$$Pr+Qs+X+pZ=0,$$
$$Ps+Qt+Y+qZ=0.$$

Die Elimination von r, s, t aus den letzten vier Gleichungen giebt die Gleichung DF. Bestimmt man indessen aus ihnen eine der Grössen r, s, t, so erhält man einen Bruch, dessen Nenner $Py'-Qx'$ ist. Ist daher die gewählte Kurve eine Charakteristik, so müssen wegen $Py'-Qx'=0$ auch die Zähler der

*) Ich werde in Zukunft mit D totale Differentiationen bezeichnen, wobei ich, wenn keine Verwechselung möglich ist, je nach der Bequemlichkeit, mir Differentiale oder Differentialquotienten im expliciten Ausdruck geschrieben denken werde.

Auflösungen nach r, s, t verschwinden, und dies liefert noch eine Gleichung, nämlich:

$$Pp' + x'(X + pZ) = 0,$$

oder:

$$Qq' + y'(Y + qZ) = 0.$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ist die Gleichung $DF = 0$. Aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} px' + qy' &= 1, \\ Qx' - Py' &= 0, \\ Pp' + x'(X + pZ) &= 0, \\ Qq' + y'(Y + qZ) &= 0 \end{aligned}$$

kann man die Differentialquotionen x', y', p', q' bestimmen, und findet:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{P}{Pp + Qq} \\ y' &= \frac{Q}{Pp + Qq} \\ p' &= -\frac{X + pZ}{Pp + Qq} \\ q' &= -\frac{Y + qZ}{Pp + Qq} \end{aligned}\right\} C.$$

Ich verzeichne noch folgende später zu benutzende Gleichung:

$$(X + pZ)\,q' - (Y + qZ)\,p' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad C_1.$$

Mit Hülfe der Gleichung $F = 0$ kann man z. B. aus den drei ersten Gleichungen q eliminiren, und sie sind dann drei gewöhnliche Differentialgleichungen mit den vier Variabeln $xyzp$.

Sämmtliche Gleichungen C beschränken in keiner Beziehung die Wahl des Strahls des Polarkegels, auf welchen man von seiner Spitze xyz zu einem benachbarten Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ übergehen gedenkt, um eine Charakteristik zu construiren. Construirt man für den letzteren Punkt den Polarkegel, so verwandeln sich für irgend einen seiner Strahlen, der zur Fortsetzung der Charakteristik dienen soll, p in $p + dp$, q in $q + dq$. Ist nun dp und dq bestimmt, so ist es auch der Strahl des zweiten Kegels und die Charakteristik kann nicht mehr willkürlich fortgesetzt werden. Aus den Gleichungen C folgt:

$$dp = -dz\,\frac{X + pZ}{Pp + Qq},$$

$$dq = -dz\,\frac{Y + qZ}{Pp + Qq}.$$

In diesen Gleichungen ist xyz durch die Spitze des ersten Polarkegels gegeben, p und q durch dessen Richtung, dz durch seine Länge. Also sind dp und dq bestimmt, und mit ihnen die Lage des Strahls des zweiten Kegels. Daraus ergiebt sich, dass von einer Charakteristik, soll sie auf einer Integraloberfläche liegen, nur ein Element der Lage und Richtung nach aus dem Polarkegel, dem es angehört, willkürlich herausgegriffen werden darf.

Hiermit ist die zweite Frage ebenfalls erledigt.

Ich werde, wo es nöthig ist, Charakteristiken der letzteren Art, von den übrigen, welche die Gleichung $\Phi = 0$ erfüllen, durch die Benennung »Integralcharakteristiken« unterscheiden.

§. 31.

Integralconoide. Deren Generation. Sie sind Integraloberflächen.

Ist ein Punkt im Raume und die Lage der durch ihn gehenden Charakteristik gegeben, so ist damit die Charakteristik ihrer ganzen Länge nach bestimmt. Hieraus folgt, dass man durch irgend einen Punkt so viel Charakteristiken legen kann, als der für diesen Punkt als Spitze construirte Polarkegel Strahlen hat, mit a. W.: jeder Strahl dieses Kegels berührt in der Kegelspitze eine Charakteristik, indem er ein Element mit ihr gemein hat.

Denkt man sich nun alle Charakteristiken, die durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ gehen, gleichzeitig construirt, so ist ihr Ort eine eigenthümliche conoidische*) Oberfläche, für welche der Punkt $\mathfrak{P}$ ein Einschnürungspunkt ist, mit deren merkwürdigen Eigenschaften wir uns hier beschäftigen wollen. Diese Oberflächen mögen Integralconoide heissen, um in der Benennung ihre wichtigste Eigenschaft anzudeuten, nämlich die, dass sie Integraloberflächen sind. Die letztere Behauptung will ich beweisen, indem ich eine Integraloberfläche construire, deren Cha-

---

*) Ich gebrauche hier das Wort »conoidisch« schlechtweg für kegelartig. Uebrigens können die Conoide, von denen hier die Rede ist, Gestalten haben, die mit den Kegeln ausser in der nächsten Umgebung ihrer Spitze nichts gemein haben. Wir werden z. B. sehen, dass sie in gewissen Grenzfällen in Kugeln etc. übergehen können.

rakteristiken sämmtlich durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehen. Diese wird mit dem Integralconoid, dessen Spitze der Punkt $\mathfrak{P}$ ist, identisch sein müssen.

Für jeden Punkt der von seiner Spitze $\mathfrak{P}$ sehr wenig entfernten Directrix eines Polarkegels construirt man abermals den Polarkegel. Diese Polarkegel »erster Etage« werden eingehüllt von einer Oberfläche, welche offenbar noch grosse Aehnlichkeit mit einem Kegel hat. Für jeden Punkt einer neuen Kurve, welche man auf der Umhüllungsfläche der Kegel erster Etage äusserst nahe der Directrix des Kegels $\mathfrak{P}$ zieht, construirt man nun die Polarkegel »zweiter Etage«, welche von einer zweiten Oberfläche eingehüllt werden. Dann construirt man die dritte Umhüllungsfläche, u. s. f. Alle diese Umhüllungsoberflächen werden ihres Theil umhüllt von einer conoidischen Oberfläche, die im Punkt $\mathfrak{P}$ mit dem für diesen Punkt als Spitze construirten Polarkegel zusammenfällt. Mithin gehen ihre sämmtlichen Charakteristiken durch diesen Punkt, oder sie ist der Ort sämmtlicher durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehender Integralcharakteristiken, und ist eine Integraloberfläche, weil sie in jedem ihrer Punkte einen Polarkegel tangirt.

§. 32.
Die charakteristische Abwickelbare und einige Eigenschaften der Conoide.

Ich nenne »charakteristische Abwickelbare« eine folgendermassen erzeugte Oberfläche.

Es sei eine Reihe Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, .. auf einer Integralcharakteristik gegeben. Wir construiren zu jedem den Polarkegel, und legen durch jeden eine Tangentialebene an den Polarkegel, welche gleichzeitig die Charakteristik berührt, so werden, wenn man die Zahl der Punkte ins Unbegrenzte vermehrt und ihre Abstände verschwinden lässt, alle Tangentialebenen von der »charakteristischen Abwickelbaren« eingehüllt.

Alle wie immer gestalteten Integraloberflächen, welche durch eine bestimmte Integralcharakteristik gehen, müssen in dieser die charakteristische Abwickelbare berühren. Dieses ist ein wesentlicher Unterschied der Integrale der nicht lineären von denen der lineären partiellen Differentialgleichungen. Da wir

in §. 16 gesehen haben, dass die Gleichung jeder Oberfläche, welche man durch die Charakteristiken der letzteren legt, die Differentialgleichung erfüllt.

Construirt man nun zu sämmtlichen durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ gehenden Charakteristiken die Abwickelbaren, dann ist ihre Umhüllungsoberfläche das Integralconoid, dessen Spitze im Punkt $\mathfrak{P}$ liegt.

Man stelle sich auf dem Conoid irgend eine quer durch die Charakteristiken gezogene Kurve vor, und denke sich zu allen Punkten dieser Kurve die Conoide, deren Spitzen sie sind, construirt, so werden diese Conoide von dem ersten eingehüllt. Je zwei benachbarte von diesen Conoiden schneiden sich aber. Nun ist klar, dass, wenn die umhüllten Flächen sich in der Umhüllungsfläche schneiden, sie von dieser berührt werden. Mithin werden die Conoide, deren Spitze auf der transversalen Kurve liegen, vom ersten Conoid berührt.

Aus dieser Bemerkung ziehen wir einen für das Folgende wichtigen Schluss. Zwei Conoide, welche mit ihren Spitzen auf derselben Charakteristik liegen, berühren sich längs dieser Charakteristik in ähnlicher Weise wie zwei Kegel längs eines gemeinsamen Strahls. Ein Conoid steckt im Andern.

Wir können noch eine Bemerkung hinzufügen. Da alle charakteristischen Abwickelbaren, die durch einen Punkt gehen, von dem Conoid eingehüllt werden, dessen Spitze in diesem Punkt liegt, alle wie immer beschaffenen Integraloberflächen, die durch den Punkt gehen, aber von den charakteristischen Abwickelbaren tangirt werden, so ist das Conoid die Hülle aller gleichviel wie gestalteten Integraloberflächen der Gleichung $F=0$, welche man durch jenen Punkt legen kann.

Ich werde später auf die Eigenschaften der Integralconoide ausführlicher zurückkommen. Zunächst aber habe ich an das Gesagte einige unerlässliche Betrachtungen über die Integralcharakteristiken und deren Gleichungen anzuschliessen.

VIII. Ueber die Integralcharakteristiken als Kurvensystem im Raume.

§. 33.

Die Integrale ihrer Differentialgleichungen.

Nennen wir in Zukunft Differentialgleichungen der Integralcharakteristiken die Gleichungen (§. 30):

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{P}{Pp+Qq}, \\ y' &= \frac{Q}{Pp+Qq}, \\ p' &= -\frac{X+pZ}{Pp+qQ}, \end{aligned}\right\} C_d,$$

in denen man sich q durch x, y, z, p mit Hülfe der Gleichung $F=0$ ersetzt zu denken hat. Die Integrale dieser Gleichungen seien:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \lambda\ (x, y, z, p) \\ \beta &= \lambda_1(x, y, z, p) \\ \gamma &= \lambda_2(x, y, z, p) \end{aligned}\right\} C_i,$$

Man denke sich ferner gegeben irgend drei andere ganz beliebige Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a &= l\ (x, y, z, p) \\ b &= l_1(x, y, z, p) \\ c &= l_2(x, y, z, p) \end{aligned}\right\} (C_i),$$

als Integrale der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \psi\ (x, y, z, p), \\ y' &= \psi_1(x, y, z, p), \\ p' &= \psi_2(x, y, z, p), \end{aligned}\right\} (C_d).$$

(wo also die l oder die ψ von einander unabhängig sind), so können diese offenbar ebenfalls durch ein Kurvensystem im Raum ähnlich wie die Charakteristiken dargestellt werden. Es wird sich nun darum handeln festzustellen, wodurch sich das allgemeine Kurvensystem von dem System der Integralcharakteristiken unterscheidet, und dann zu sehen, welche Bedingungsgleichungen für die Funktionen λ aus diesem Unterschiede folgen. Denn sie sind offenbar nicht, wie die Funktionen l, unabhängig von einander, da die Funktionen x', y', p' von x, y, z, p es ebenfalls nicht sind.

§. 34.

Ueber die Bedeutung des System (C_d), (C_i).

Welche Bedeutung man p beilegt, ist gleichgültig. Man kann sich p stets durch x' oder y', eine der Neigungstangenten der Elemente der die Gleichungen (C_d) darstellenden Kurven ersetzt denken. Denkt man sich p aus den Gleichungen $x'=\psi$, $y'=\psi_1$ eliminirt, so erhält man wieder die Gleichung eines Kegels, und man sieht, dass die Elemente der Integralkurven der Gleichungen (C_d) in jedem Punkte des Raumes einen Kegel bilden. Das Raisonnement am Schlusse des §. 30 lässt sich hier wiederholen und es folgt, dass die Integralkurven des Systems (C_d) bestimmt sind durch die Bedingung, dass sie einen gegebenen Punkt mit gegebener Neigung zu passiren haben, und zwar ist nur eine Neigungstangente des Elements, welches den Punkt passirt, willkürlich.

Alle Integralkurven des Systems (C_d), welche einen Punkt $\mathfrak{P}$ passiren, haben demnach ebenfalls zum Ort eine conoidische Oberfläche und der Unterschied der Systeme (C_i) und C_i liegt nun auf der Hand. Er kann nämlich nur darin gesucht werden, dass zwei Integralconoide, deren Spitzen auf einer Integralcharakteristik liegen, einander längs dieser Kurve berühren, während die Conoide der Gleichungen (C_d), deren Spitzen auf einer individuellen Integralkurve dieser Gleichungen liegen, sich in dieser Kurve unter endlichem Winkel schneiden. Es ist analytisch leicht einzusehen, dass die Conoide, welche man zu den Punkten der Integralkurven des Systems (C_d) construirt, einander im Allgemeinen nicht berühren können, und andererseits wird sich in der Folge ergeben, dass die Bedingung des Contacts der Integralconoide in den Charakteristiken ausreicht, um die Integraloborflächen einer Gleichung $F=0$ zu construiren. Die Betrachtung dieses §. ist deshalb von Interesse, weil sie andeutet, wie man ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit vier Variabeln geometrisch darstellen kann.

Zunächst wollen wir die in den vorigen §§. entwickelten Vorstellungen auf ihre einfachste Form bringen.

§. 35.

Die Integralstreifen.

Denken wir uns eine Integralcharakteristik C construirt, und auf derselben beweglich den Punkt $\mathfrak{P}$. Durch diesen Punkt $\mathfrak{P}$ legen wir eine neue Integralcharakterististik C_1, welche mit der ersten den unendlich kleinen Winkel ε einschliessen mag. Beide Charakteristiken gehören offenbar dem Conoid an, dessen Spitze im Punkt $\mathfrak{P}$ liegt. Lassen wir nun auf beiden Charakteristiken eine Ebene rollen, welche stets beide gleichzeitig berührt, so werden die verschiedenen Lagen dieser Ebene von einer Abwickelbaren eingehüllt, die längs der ersten Charakteristik einen unendlich kleinen Winkel mit der charakteristischen Abwickelbaren einschliesst (§. 32), und mit ihr zusammenfällt, wenn man den Winkel ε verschwinden lässt. Dies ist der Sinn der obigen geometrischen Entwickelungen.

Ich werde den Streifen der Abwickelbaren, welcher zwischen den beiden Charakteristiken liegt, den »Integralstreifen für die Charakteristik C und den Punkt $\mathfrak{P}$« nennen, und mit $(c, \mathfrak{P})$ bezeichnen.

§. 36.

Ueber die Charakteristiken der Gleichung $\varphi(p, q) = 0$.

Die Beantwortung der Frage, welches die allgemeinste Form der Gleichung $F = 0$ sei, für welche die Integralcharakteristiken gerade Linien werden, würde Schwierigkeiten darbieten. Eine scheinbar sehr allgemeine Form eines Integrals mit zwei Constanten, dessen Charakteristiken geradlinig sind, ist diese:

$$z = \psi(\alpha, \beta)\, x + \psi_1(\alpha, \beta)\, y + \psi_2(\alpha, \beta).$$

Die zweite Gleichung der Charakteristiken wird dann:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} x + \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} y + \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} + \gamma \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta} x + \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} y + \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} \right),$$

wo nun also α, β und $\gamma = \frac{d\beta}{d\alpha}$ die Parameter der Charakteristiken sind. Es folgt aber aus der ersten Gleichung: $p = \psi$, $q = \psi_1$. Mithin ist jene Form nicht allgemeiner als diese:

$$z = \alpha x + \beta y - \varphi(\alpha, \beta),$$

welche auf die Differentialgleichung:

$$F \equiv z - xp - yq - \varphi(p, q) = 0$$

führt. Es wird in der Bemerkung am Schluss des gegenwärtigen §. gezeigt werden, dass die vorstehende Differentialgleichung äquivalent ist mit der Differentialgleichung der abwickelbaren Oberflächen:

$$\varphi(p, q) = 0$$

Die geometrische Interpretation dieser Gleichung ist aber folgende.

Ihr charakteristischer Kegel verändert seine Gestalt nicht, während die Spitze den Ort verändert, und, da die Charakteristiken gerade Linien sind, so ist der Polarkegel gleichzeitig das Integralconoid. Der Integralstreifen der Gleichung $\varphi = 0$ ist das Stück Ebene, welches zwischen zwei unendlich nahen Strahlen des Polarkegels eingeschlossen ist.

Sehen wir irgend eine Charakteristik C der Gleichung $\varphi(p, q) = 0$ als die primitive an und denken uns darauf einen Punkt $\mathfrak{P}$ beweglich, durch welchen wir eine secundäre Charakteristik C_1 legen, welche mit der ersten den Integralstreifen $(c, \mathfrak{P})$ giebt. Die Ebene des Streifens $(c, \mathfrak{P})$ bleibt stets unendlich nahe der Tangentialebene an den Kegel $\mathfrak{P}$ im Strahl C, welche der charakteristischen Abwickelbaren entspricht; der Punkt $\mathfrak{P}$ mag was immer für eine Lage annehmen. Lässt man ihn in unendliche Entfernung rücken, so ist es erforderlich, den Winkel zwischen den Geraden CC_1 zweiter Ordnung werden zu lassen, damit ihre Distanz unendlich klein bleibe. Dann werden sie aber parallel. Die Tangentialebene an den Polarkegel $\mathfrak{P}$ in der Geraden C tangirt aber alle Polarkegel, deren Spitzen in ihr liegen, und zwar in den, C parallelen Strahlen. Mithin fällt der Streifen (c, ∞) ganz in dieselbe, und sie ist als aus solchen Streifen zusammengesetzt anzusehen.

Wir haben bis jetzt zwei Gattungen von Integraloberflächen der Gleichung $\varphi(p, q) = 0$ kennen gelernt. Einmal den Kegel $\mathfrak{P}$, welcher offenbar zusammengesetzt ist aus Integralstreifen von der Form $(c, \mathfrak{P})$, wo $\mathfrak{P}$ für alle Integralstreifen constant bleibt. Dann die Ebene, welche der Lage nach bestimmt ist, durch die Bedingung eine gegebene Charakteristik C zu enthalten und zusammengesetzt ist aus Streifen von der Form (c, ∞), wo C und $\mathfrak{P}$ (von dem mindestens eine

Coordinate ∞ ist) von Streifen zu Streifen variiren. Es giebt noch eine dritte Art Integraloberflächen der Gleichung $\varphi=0$, welche aus Streifen mit variabelm $\mathfrak{P}$, dessen Coordinaten indessen endlich sind, bestehen, nämlich die Abwickelbaren, auf welche wir noch zurückkommen.

Was die beiden soeben besprochenen Gattungen Integraloberflächen, den Kegel und die Ebene, betrifft, so ergeben sich deren Gleichungen aus der Gleichung $\varphi_p \equiv \varphi(p, q) = 0$ auf folgende Weise:

Ist die Gleichung der Ebene:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

so müssen die Grössen α und β die Gleichung

$$\varphi_\alpha \equiv \varphi(\alpha, \beta) = 0$$

erfüllen, soll jene Ebene eine Integraloberfläche der Gleichung $\varphi_p = 0$ sein. Da man ferner die Gleichung in Neigungstangenten des Polarkegels des Kegels $\varphi = 0$ erhält, indem man p und q aus den Gleichungen:

$$px' + qy' = 1,$$
$$\varphi_p = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} y' - \frac{\partial \varphi}{\partial q} x' = 0$$

eliminirt, so hat man in das Ergebniss der Elimination nur $\frac{x-x_1}{z-z_1}$, $\frac{y-y_1}{z-z_1}$ für x' und y' zu setzen, um seine Gleichung in den laufenden Coordinaten xyz zu gewinnen. Seine Spitze ist der Punkt $x_1 y_1 z_1$.

Bemerkung. Differenzirt man die Gleichung:

$$F(p, q, z - xp - yq) = 0$$

nach x und nach y, so erhält man:

$$r \frac{\partial F}{\partial p} + s \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$
$$s \frac{\partial F}{\partial p} + t \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

und hieraus folgt die Differentialgleichung zweiter Ordnung der abwickelbaren Oberflächen: $rt - s^2 = 0$. Giebt man ihrem ersten Integral einfach die in diesem §. besprochene Form $\varphi(p, q) = 0$, so ist uns die Bedeutung der willkürlichen Funktion φ oder vielmehr der Gleichung $\psi(a, b) = 0$, welche man durch Elimination von p und q aus den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \ \frac{\partial \varphi}{\partial p} b - \frac{\partial \varphi}{\partial q} a = 0, \ pa + qb = 1$$

erhält, aus dem Capitel III hinlänglich klar. Indessen mag noch folgende Bemerkung das dort Gesagte ergänzen.

Eine Abwickelbare ist nur der Ort der sämmtlichen Tangenten an eine räumliche Kurve (Kurve doppelter Krümmung), und diese ist die Rückkehrkante der Abwickelbaren. Da der Polarkegel $\psi(a, b) = 0$ seine Gestalt von einem Punkt des Raumes zum anderen nicht verändert, so ist er durch eine einzige Rückkehrkante aller in $\varphi = 0$ enthaltenen Abwickelbaren bestimmt, wie man folgendermassen einsehen kann. Wir notiren auf der betreffenden Rückkehrkante die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ und es sei $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1} = ds$ (Neigungstangenten a, b); $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = ds_1$ (Neigungstangenten a_1, b_1), etc. Die Kurve $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots$ liefert im Punkt $\mathfrak{P}$ einen Strahl des Kegels $\psi = 0$: nämlich (a, b); gehen wir mit diesem Kegel (der vorläufig nur aus einem Strahl besteht) über zum Punkt $\mathfrak{P}_1$, so kommt hier der Strahl (a_1, b_1) hinzu; im Punkt $\mathfrak{P}_2$ kommt der Strahl (a_2, b_2) hinzu, u. s. f., so dass die Kurve in ihrer Gesammtheit ein endliches, stetiges Stück Kegelfläche bestimmt.

Die eben entwickelte Beziehung zwischen irgend einer Rückkehrkante der Abwickelbaren $\varphi = 0$ und dem Polarkegel $\psi = 0$, ist eine geometrische Eigenschaft aller räumlichen Kurven. Es seien

$$x = \lambda(z),$$
$$y = \lambda_1(z)$$

die Gleichungen einer solchen, so liefert die Elimination von z aus den Gleichungen:

$$x' = \frac{dx}{dz} = \frac{d\lambda}{dz},$$
$$y' = \frac{dy}{dz} = \frac{d\lambda_1}{dz}$$

eine Gleichung $\psi(x', y') = 0$, welche man ansehen kann als die Gleichung einer Kegelfläche, die entsteht, wenn eine Gerade so bewegt wird, dass sie einen gegebenen Punkt $\mathfrak{P}$ nicht verlässt, und in jeder ihrer Lagen irgend einer Tangente der Kurve $x=\lambda$, $y=\lambda_1$ parallel ist. Dieser Kegel $\psi=0$ hat merkwürdige Eigenschaften, z. B. folgende: Nennt man »Hauptebenen« einer räumlichen Kurve 1) die Ebene, welche zwei successive Elemente derselben erhält, 2) die Normalebene, 3) die Tangentialebene an die Kurve, welche auf diesen beiden Ebenen senkrecht steht: so sind dies auch drei Hauptebenen

in Bezug auf den Kegel $\psi = 0$. Die erste ist die Tangentialebene an diesen Kegel, die dritte ist die Normalebene, und die zweite ist die Tangentialebene an den Polarkegel des Kegels $\psi = 0$.

Wenn der Kegel $\psi = 0$ durch die räumliche Kurve vollkommen bestimmt ist, so wissen wir aus der Theorie der totalen Differentialgleichungen (Cap. III), dass eine Umkehrung dieses Satzes unzulässig ist.

§. 37.
Integralplanoide.

Vergleichen wir die Integraloberflächen irgend einer Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ mit denen der Gleichung $\varphi(p, q) = 0$, so finden wir, dass das Conoid die dem Polarkegel der Gleichung $\varphi = 0$ analoge Gattung ausmacht. Das Conoid besteht nämlich aus Streifen, für welche $\mathfrak{P}$ constant ist.

Stellen wir uns nun vor, die Charakteristiken seien stetige Linien, welche Zweige haben, die sich in die Unendlichkeit verlieren. Es sei C eine solche Charakteristik, $\mathfrak{P}$ ein Punkt darauf und wir denken uns $\mathfrak{P}$ nach beiden Richtungen in die Unendlichkeit auf der Charakteristik fortbewegt. Dann wird der Streifen (c, ∞) einer Grenzgestalt entsprechen, die das Analoge des auf dieselbe Weise bezeichneten Streifens der Gleichung $\varphi = 0$ des vorigen §. ist. Es sei C die primitive Charakteristik, C_1 die zweite, welche mit ihr den Streifen (c, ∞) bildet. Es seien mit anderen Worten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_{-1}$ drei auf einanderfolgende Punkte der Charakteristik C. Die Charakteristik C_1 mag fortwährend durch den Punkt $\mathfrak{P}'$ gehen, der dem Punkt $\mathfrak{P}$ sehr nahe auf der charakteristischen Abwickelbaren liegt. Dann ist der Streifen (c, ∞) die Grenze der Streifen $(c, \mathfrak{P}_1)$ und $(c, \mathfrak{P}_{-1})$, wenn die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_{-1}$ sich beide nach entgegengesetzten Richtungen auf der Charakteristik bewegen und in die Unendlichkeit fallen. Zu C_1 construiren wir den Streifen (c_1, ∞), welchen dann noch die Charakteristik C_2 begrenzt. An C_2 schliesst sich der Streifen (c_2, ∞) an, u. s. f. Diese Streifen

$$(c, \infty),\ (c_1, \infty),\ (c_2, \infty),\ \ldots.$$

schliessen sich zu einer Oberfläche zusammen, welche mithin

unter den Integraloberflächen der Gleichung $F=0$ die nämliche Rolle spielt, als die Ebene unter denjenigen der Gleichung $\varphi=0$. Wir werden diese Oberflächen daher Planoide nennen, wobei es wohl kaum einer Erwähnung bedarf, dass die Gestalt der Planoide ebensowenig mit der Ebene, als die Gestalt der Conoide mit dem Kegel gemein hat.

Aus der Art der Entstehung der Planoide geht hervor, dass zu einer Charakteristik nur ein Planoid gehört, welches durch sie hindurch geht. Da indessen jedes Planoid eine Schaar von Charakteristiken enthält, so ist anzunehmen, dass das Gesetz der Planoide von zwei Parametern abhängt, während, wie wir wissen, das Gesetz der Integralcharakteristiken deren drei enthält. Die Richtigkeit der Annahme kann auf folgende Weise bewiesen werden. Ich werde zeigen, dass das Gesetz aller Planoide, die durch ein endliches, begrenztes Flächenstück gehen, nach nur zwei auf den Umfang des Flächenstücks bezüglichen Parametern variiren kann.

Man denke sich irgend eine Ebene durch die Charakteristiken gelegt, und auf dieser Ebene einen Kreis gezeichnet. Der Kreis wird zunächst einen Raum bestimmen, welcher alle Charakteristiken, die durch seine Fläche gehen, enthält. Auf die durch diesen Raum gehenden Planoide bezieht sich das folgende Raisonnement. Ist der Halbmesser des Kreises hinlänglich klein, so werden alle Planoide, welche durch einen Punkt der Kreisfläche gehen, die Kreisperipherie schneiden. Und jedes Planoid, das die Kreisperipherie schneidet, gehört, wie wir wissen, einer dieselbe Linie schneidenden Charakteristik an. Also werden alle Schaaren von Planoiden, die man für die Punkte des Kreisumfangs erhält, die Anzahl der für die ganze Kreisfläche zu construirenden erschöpfen. Die für einen Punkt der Peripherie zu construirenden Planoide variiren nach einem Parameter, ein zweiter Parameter bestimmt den Ort auf dem Kreisumfang, also hängt ihr Gesetz nur von zwei Parametern ab.

Ich bin mir wohl bewusst, im Vorstehenden keine allgemeine Definition der Planoide gegeben zu haben. Denn sie ist auf die Charakteristiken nicht anwendbar, welche geschlossene Kurven sind, welche in der Endlichkeit abbrechen, u. s. f. Es ist eben vorausgesetzt, dass sie Zweige haben, die in die

Unendlichkeit gehen. Nichtsdestoweniger bietet die ganz allgemeine geometrische Eigenschaft der letzteren Art Charakteristiken Planoide zu liefern, eine Bürgschaft dafür, dass diese Oberflächen allgemeine analytische Charaktere haben, die auch gewissen Integraloberflächen bei den Charakteristiken, die wir ausgenommen haben, zukommen.

§. 38.

Analytische Form der Bedingung für den Contact der Integralstreifen.

Die Bemerkung, dass die Integralstreifen $(c, \mathfrak{P})$ für alle Werthe von $\mathfrak{P}$ bei verschwindendem Winkel der sie einschliessenden Charakteristiken mit der charakteristischen Abwickelbaren zusammenfallen, führt zu der Frage, welche analytische Bedingung daraus für die Form der Integrale C_i erwachse.

Es seien:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \lambda\,(x, y, z, p),\\ \beta &= \lambda_1(x, y, z, p),\\ \gamma &= \lambda_2(x, y, z, p),\end{aligned}\right\} C_i$$

die Gleichungen einer Charakteristik, die durch einen Punkt $\mathfrak{P}_1$ mit der Richtung (a_1, b_1) geht, d. h. deren Tangente in diesem Punkt die Neigungstangenten a_1, b_1 hat. Diese Form der Integrale C_i ist keine bestimmte. Bezieht man sie einmal auf den Punkt $\mathfrak{P}_1$ mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 einmal auf irgend einen anderen Punkt $\mathfrak{P}$, so kann man ihnen die Form:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\,(x_1, y_1, z_1, p_1) &= \lambda\,(x, y, z, p),\\ \lambda_1(x_1, y_1, z_1, p_1) &= \lambda_1(x, y, z, p),\\ \lambda_2(x_1, y_1, z_1, p_1) &= \lambda_2(x, y, z, p)\end{aligned}\right\} C_i\ 1)$$

geben, und man erkennt, dass hieraus unzählige Formen abgeleitet werden können, je nach der augenblicklichen Opportunität. Von den vier auf den parametrischen Punkt $\mathfrak{P}_1$ bezüglichen Grössen x_1, y_1, z_1, p_1 kann einer ein fester Werth ertheilt werden*). Ich will gegenwärtig die Bedingung des

*) Geometrisch ist es am einfachsten, eine von den Grössen x_1, y_1, z_1 gleich einer Constanten zu setzen. Macht man z. B. $z_1 = 0$, so sind die drei Parameter der Charakteristik x_1, y_1, p_1, d. h. die Coordinaten des Punkts, in dem sie, und die Neigung, unter welcher sie die xy Ebene passirt. Es ist symmetrischer p_1 constant zu setzen, die geometrische Bedeutung der Parameter der Charakteristiken wird dann aber complicirt.

Contacts der Integralstreifen für die eben gegebene allgemeine Form der Integrale C_i ableiten, und sie nur für e i n e besondere Form derselben verificiren.

Wir denken uns neben der ersten Charakteristik noch eine zweite, die durch den Punkt $\mathfrak{P}_1$ geht, und dort mit der ersten einen unendlich kleinen Winkel einschliesst. Es sei auf der zweiten Charakteristik $\mathfrak{P}'$ ein dem Punkt $\mathfrak{P}$ sehr nahe gelegener Punkt. Die Differenzen der Grössen, die sich auf den Punkt $\mathfrak{P}'$ und den Punkt $\mathfrak{P}$ beziehen, mögen durch das Symbol d_1 bezeichnet werden, so dass z. B. d_1x, d_1y, d_1z die Projectionen der Verbindungslinie beider Punkte darstellen. Dann ist:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}d_1x+\frac{\partial\lambda}{\partial y}d_1y+\frac{\partial\lambda}{\partial z}d_1z+\frac{\partial\lambda}{\partial p}d_1p=\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}d_1p_1,$$
$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}d_1x+\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}d_1y+\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}d_1z+\frac{\partial\lambda_1}{\partial p}d_1p=\frac{\partial\lambda_1}{\partial p_1}d_1p_1,$$
$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}d_1x+\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}d_1y+\frac{\partial\lambda_2}{\partial z}d_1z+\frac{\partial\lambda_2}{\partial p}d_1p=\frac{\partial\lambda_2}{\partial p_1}d_1p_1.$$

Hierzu kommt noch die Gleichung:

$$pd_1x+qd_1y=d_1z.$$

Da die Richtung $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$ auf der charakteristischen Abwickelbaren ganz willkürlich ist, so kann man in den vorstehenden Gleichungen nach einander d_1x, d_1y, d_1z, d_1p gleich Null setzen, und die übrigen Differentiale eliminiren. Dies giebt dann für den Contact der Integralstreifen folgende Bedinguugen:

$$0=\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial p}\frac{\partial\lambda_2}{\partial p_1}\right)-\frac{\partial\lambda_1'}{\partial x}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\lambda_2}{\partial p_1}\right)+\frac{\partial\lambda_2'}{\partial x}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\lambda_1}{\partial p_1}\right),$$
$$0=\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial p}\frac{\partial\lambda_2}{\partial p_1}\right)-\frac{\partial\lambda_1'}{\partial y}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\lambda_2}{\partial p_1}\right)+\frac{\partial\lambda_2'}{\partial y_1}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\lambda_1}{\partial p_1}\right),$$
$$0=\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\lambda_1'}{\partial x}\frac{\partial\lambda_2'}{\partial y}\right)-\frac{\partial\lambda_1}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\frac{\partial\lambda_2'}{\partial y}\right)+\frac{\partial\lambda_2}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\frac{\partial\lambda_1'}{\partial y}\right),$$

wo $\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{\partial\lambda}{\partial z}\equiv\frac{\partial\lambda'}{\partial x}$, etc. $\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\equiv\frac{\partial\lambda'}{\partial y}$, etc. gesetzt ist. Die dritte Gleichung ist übrigens eine Folge der beiden ersten, vorausgesetzt, dass die Grössen $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\lambda_1}{\partial p_1}\right)$, etc. nicht für sich verschwinden.

Man kann die Integrale C_i aus den Integralen mit zwei Constanten der Gleichung $F=0$ in folgender Form erhalten:

$$f=0,\ \frac{df}{d\alpha}\equiv\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial f}{\partial\beta}=0,\ \frac{df}{dx}\equiv\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}=0 \text{ oder } \frac{df}{dy}\equiv\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen α, β, γ als Funktionen von x, y, z, p, so sind die α, β, γ die Integrale C_i. Es ist leicht, an dieser Form der Integrale die Bedingungen für den Contact der Integralstreifen zu verificiren. Bezieht man sie nämlich auf den Punkt x_1, y_1, z_1, wodurch man erhält:

$$f_1 = 0, \frac{df_1}{d\alpha} = 0, \frac{df_1}{dx} = 0,$$

so hat man sechs Gleichungen, die, total differenzirt, die Differenziale d_1x, d_1y, d_1z, d_1p, d_1p_1, $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ enthalten. Indessen $D_1 f = 0$ giebt wegen $d\beta = \gamma d\alpha$ nur:

$$\frac{\partial f}{\partial x} d_1x + \frac{\partial f}{\partial x} d_1y + \frac{\partial f}{\partial z} d_1z = 0$$

und $D_1 f_1 = 0$ giebt $\frac{df_1}{d\alpha} = 0$. Die Gleichung $D_1 f = 0$ befriedigt aber wegen $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$ die Bedingung $pd_1x + qd_1y = d_1z$, und dies ist die Bedingung für den Contact der Integralstreifen. Die übrigen Gleichungen:

$$D_1 \frac{df}{d\alpha} = 0, D_1 \frac{df}{dx} = 0, D_1 \frac{df_1}{d\alpha} = 0, D_1 \frac{df_1}{dx} = 0,$$

reichen zur Elimination der darin vorkommenden Differenziale nicht aus und geben folglich keine neue Bedingung. So dass die Integrale C_i in ihrer gegenwärtigen Form den Contact der Integralstreifen als alleinige identische Folge nach sich ziehn.

Zu bemerken ist, dass die Integrale α und β in einer Beziehung stehen, welche die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p} \frac{\partial \beta_1}{\partial p_1}\right) = 0$$

nach sich zieht. Man bestimmt die Integrale α und β aus den Gleichungen: $f = 0$ und $\frac{df}{dx} = 0$. Da man also aus den Integralen α und β durch Elimination von p $f = 0$ zurückerhält, so muss man das Integral $\frac{df}{d\alpha}$ durch Differentiation beider Gleichungen nach α finden. In der That folgt:

$$1 = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \gamma = \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha}$$

oder

$$\gamma \frac{\partial \lambda}{\partial p} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} = 0$$

und da dies für jeden Punkt der Charakteristik gilt, so folgt daraus die obige Relation.

Beispiel. Es sei die Differentialgleichung:

$$F \equiv xp^2 + yq^2 - z = 0$$

gegeben. Die Gleichungen der Charakteristiken werden:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2xp}{2z}, \\ y' &= \frac{2yq}{2z}, \\ p' &= -\frac{p^2-p}{2z}, \\ q' &= -\frac{q^2-q}{2z}, \end{aligned}\right\} C_d$$

und sie haben folgende Integrale:

$$\left.\begin{aligned} p-1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{x}}, \\ q-1 &= \frac{\beta}{\sqrt{y}}, \\ 1-\frac{1}{p} &= \frac{\gamma}{\sqrt{z}}, \\ 1-\frac{1}{q} &= \frac{\delta}{\sqrt{z}}, \end{aligned}\right\}$$

wo zwischen den Constanten α, β, γ die Relation:

$$\gamma^2\delta^2 = \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2,$$

stattfindet.

Von diesen Integralen hat man irgend drei zu nehmen, und daraus p oder q mit Hülfe der Gleichung $F=0$ zu eliminiren, um die Gleichungen C_i zu erhalten.

Eliminirt man p und q aus dem ersten und zweiten Integral und der Gleichung $F=0$, wobei das zweite Integral erst auf die Form:

$$xp^2 + (\sqrt{y}+\beta)^2 = z$$

zu bringen ist, so folgt:

$$z = (\sqrt{x}+\alpha)^2 + (\sqrt{y}+\beta)^2$$

und dies ist ein Integral mit zwei Constanten der Gleichung $F=0$. Giebt man dem zweiten Integral die Form:

$$\sqrt{xp^2-z} - \sqrt{y} = \beta$$

und differenzirt das erste und zweite Integral nach p, dividirt die so erhaltenen Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dp} = \sqrt{x},$$

$$\frac{d\beta}{dp} = \frac{xp}{\sqrt{xp^2-z}}$$

durch einander und setzt den Quotienten gleich einer neuen Constanten ε, so kommt:

$$p = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}}.$$

Dividirt man nun das erste durch das dritte Integral, so kommt:

$$p = -\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}},$$

mithin ist $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = -\frac{\alpha}{\gamma}$. Da nun die Gleichung:

$$p = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}}$$

eine Relation zwischen dem ersten und dem dritten Integral ist, so kann man sie überhaupt als das dritte Integral ansehen, welches sich somit durch Differention aus den beiden ersten ergiebt.

Der Grund, wesshalb z. B. das erste und dritte Integral nach demselben Verfahren kein Integral mit zwei Constanten der Gleichung $F = 0$ liefern können, liegt hier sehr nahe. Die beiden Integrale:

$$p - 1 = \frac{\alpha}{\sqrt{x}},$$

$$1 - \frac{1}{p} = \frac{\gamma}{\sqrt{z}}$$

enthalten nur drei Variabeln. Sie geben folglich durch Elimination von p die Gleichung einer Cylinderfläche, deren Erzeugende der y Axe parallel ist. Diese Erzeugende würde daher auch bei Variation ihrer Parameter die Charakteristik der Cylinderflächen werden. Dadurch käme kein Polarkegel zu Stande. Man wird also unter andern kein Integral mit zwei Constanten erhalten, wenn man p eliminirt aus zwei von den Gleichungen C_i, denen eine der Variabeln x, y, z fehlt.

§. 39.

Bemerkungen und Beispiele zur Theorie der Conoide und Planoide.

Bekanntlich giebt es eine unbegrenzte Anzahl von Integralen mit zwei Constanten der Gleichung $F = 0$. Deshalb scheint es mir von Interesse, diejenigen von ihnen, welche einer präcisen geometrischen Definition fähig, einer genaueren

Untersuchung zu unterwerfen. Dies ist vorzüglich bei den Conoiden und Planoiden der Fall, mit denen wir uns jetzt beschäftigen werden.

Eliminirt man p_1 und p aus den Gleichungen:

$$\lambda\,(x_1, y_1, z_1, p_1) = \lambda\,(x, y, z, p),$$
$$\lambda_1(x_1, y_1, z_1, p_1) = \lambda_1(x, y, z, p),$$
$$\lambda_2(x_1, y_1, z_1, p_1) = \lambda_2(x, y, z, p),$$

so ergiebt sich die Gleichung:

$$f_C(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$$

der Integralconoide, in welcher man die laufenden Coordinaten x, y, z mit denen der Conoidspitze x_1, y_1, z_1 vertauschen kann, ein Umstand, der, wie wir sehen werden, eine einfache geometrische Bedeutung hat. Aus irgend einem Integral mit zwei Constanten:

$$f \equiv f\,(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

erhält man die Gleichung der Conoide auf folgende Weise. Das Conoid ist die Enveloppe aller Integraloberflächen, die durch seine Spitze x_1, y_1, z_1 gehen. Giebt man also den $\alpha\,\beta$ solche Variationen, welche der Gleichung:

$$f_1 \equiv f(x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta) = 0$$

genügen, woraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0,$$

so muss sich durch Elimination von α und β aus dieser Gleichung und den Gleichungen $f=0$, $f_1=0$ ebenfalls die Gleichung $f_C = 0$ ergeben.

Für die Aufstellung der Gleichung der Planoide habe ich keine allgemeine Regel gegeben. Dagegen will ich diese Oberflächen in dem besonders einfachen Falle der Kanalflächen aufsuchen.

Man denke sich irgend eine Kurve auf einer, der xy Ebene senkrechten Ebene gezeichnet, und die Kurve gedreht um ein Loth, gefällt auf ihren Durchschnittspunkt $x_1 y_1$ mit der xy Ebene, und es mag für jeden anderen Punkt der xy Ebene eine der oben beschriebenen congruente Schaar von Kurven construirt werden. Das System von Kurven, welches man so erhält, ist ein System von Integralcharakteristiken, die alle einander congruent sind. Integralcharakteristiken sind sie deshalb, weil ihre Integralstreifen von der Form $(c, \mathfrak{P})$ für constantes c

und variabeles 𝔓 einer Abwickelbaren angehören, und dies folgt wieder aus folgender Betrachtung. Man lege durch die zwei Punkte 𝔓 und $𝔓_1$ irgend einer ebenen Kurve in ihrer Ebene einander parallele Gerade G und G_1 und drehe die Kurve einmal um G, das andere Mal um G_1. Die so erhaltenen Rotationskörper tangiren sich längs der Kurve in ihrer ursprünglichen Lage. Das oben beschriebene System von Integralcharakteristiken kann aber ebensowohl entstehen durch Umdrehung seiner Einzelkurven um die Lothe, welche gefällt werden auf irgend eine der xy Ebene parallele Ebene, in deren Durchschnittspunkten mit jenen Einzelkurven, woraus sich denn ergiebt, dass jene Kurven allerdings Integralcharakteristiken sind.

Dies vorausgeschickt, wollen wir uns eine Vorstellung von ihren Conoiden und Planoiden verschaffen für den Fall, wo die Kurve, deren Umdrehung das System erzeugt, eine Parabel, und dann wo sie ein Kreis ist.

Die Parabel soll mit ihrem Scheitelpunkt in der xy Ebene liegen und diese lothrecht passiren. Die Conoide sind dann diejenigen Rotationskörper, welche entstehen, wenn eine Parabel um eine ihrem Parameter parallele Axe gedreht wird. Je weiter die Umdrehungsaxe vom Scheitelpunkt der Parabel rückt, um so mehr nähert sich das Conoid einem parabolischen Cylinder, in den es sich wirklich verwandelt, wenn jene Entfernung unendlich wird. Es besteht mithin der parabolische Cylinder aus Integralstreifen von der Form (c, ∞) und er ist das Planoid des betrachteten Charakteristikensystems.

Ist die erzeugende Kurve ein Kreis, so ist sie geschlossen, und es kann von einem Punkt in der Unendlichkeit keine Rede sein. Indessen zwingt uns die Analogie auch in diesem Falle eine Oberfläche als Planoid anzusehen, nämlich den Kreiscylinder. Der erzeugende Kreis mag seinen Mittelpunkt in der xy Ebene haben und senkrecht darauf stehen.

Die Conoide eines solchen Charakteristikensystems sind alle diejenigen Rotationsoberflächen, welche durch Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, ihn schneidende Gerade entstehen. Daher ist die Kugel ebenfalls ein Conoid jenes Systems, und zwar ist sie die eine Grenz-

gestalt, während die andere Grenzgestalt durch Umdrehung des Kreises um seine Tangente entsteht.

Diese Conoide bestehen sämmtlich aus Integralstreifen von der Form $(c, \mathfrak{P})$. Wie schon bemerkt, existirt hier keine Form (c, ∞). Dagegen kann man Integraloberflächen zusammensetzen aus Integralstreifen von der Form (c, i), worunter ich den Streifen verstehe, der von zwei sich nicht schneidenden Kreisen eingeschlossen ist, wo demnach der Schnittpunkt der Charakteristiken imaginär ist. Diese zwei Kreise können parallel sein, oder ihre Ebenen können einen Winkel mit einander bilden. Ist das letztere der Fall, so wird dieser Winkel als mit der Entfernung der Kreise von einander verschwindend gedacht werden müssen, ähnlich wie der Winkel zwischen den sich schneidenden Charakteristiken, die einen Integralstreifen einschliessen.

Um nun aber die Analogie nachzuweisen, welche mich bewog, in diesem Fall den Kreiscylinder, der aus von parallelen Kreisen eingeschlossenen Integralstreifen besteht, als Planoid anzusehen, verfahre ich, wie vorhin, bei den parabolischen Charakteristiken. Ich lasse die Integralstreifen in folgender Weise entstehen: Es sei c irgend einer der Kreise. Wir fällen in seiner Ebene ein Loth auf die xy Ebene, und zwar mag dessen Fusspunkt zwischen dem Durchschnittspunkt des Kreises mit dieser Ebene und seinem Mittelpunkt liegen. Dreht man die Ebene des Kreises ein wenig um jenes Loth als Axe, so begrenzen die beiden Lagen des Kreises einen Integralstreifen, von der Art, wie sie zur Bildung der Conoide gehören. Lässt man nun das Loth nach dem Mittelpunkt zurücken und dann in denselben fallen, so entsteht bei einer unendlich kleinen Drehung ein Integralstreifen, der zur Kugel gehört. Rückt das Loth weiter und zuletzt zum Kreise heraus, so liefert eine Differentialdrehung einen Integralstreifen der oben erwähnten Gattung, dessen Begrenzungskreise sich nicht schneiden und nicht parallel sind. Wird endlich das Loth in unendliche Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises verlegt, so entsteht ein Integralstreifen mit parallelen Begrenzungskreisen.

Um diese Integralstreifen zu bezeichnen, sei R der Halbmesser der Kreise und E die Entfernung der Umdrehungsaxe

von dem Mittelpunkt des Kreises. Dann hat man die vier Arten von Streifen.

$$(c,\ E=0),\ (c,\ E<R),\ (c,\ E>R)\ (c,\ E=\infty).$$

Der erste ist ein Element der Kugel. Aus Streifen der zweiten Art setzen sich die übrigen Conoide zusammen. Die sogenannten Kanalflächen bestehen aus den Streifen der dritten Art. Und die Streifen von der Form $(c,\ E=\infty)$ bilden das Planoid des gegenwärtigen Charakteristikensystems, nämlich den Kreiscylinder.

Man kann übrigens, um die Analogie zu vervollständigen, im vorliegenden Fall die Definition der Integralconoide etwas ausdehnen und zu ihnen noch die Ringflächen rechnen, welche durch Umdrehung der Kreisebene um eine ausserhalb des Kreises gelegene Axe entstehen, mit anderen Worten diejenigen Kanalflächen, in deren sämmtlichen Integralstreifen $(c,\ E>R)$, E constant ist.

§. 40.

Wie man die Natur eines Integrals mit zwei Constanten untersuchen kann.

Wenn

$$f\,(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta) = 0$$

die Gleichung irgend einer nach zwei Parametern α und β variabeln Integraloberfläche vorstellt, so erhält man die Schaar der Charakteristiken, welche sie enthält, als Durchschnittslinien der Oberfläche $f=0$ mit der Oberflächenschaar:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

deren variabler Parameter γ ist.

Hat die letztere Schaar eine Enveloppe und wird diese von der Oberfläche $f=0$ geschnitten, so bilden zwei auf einander folgende Charakteristiken der Oberfläche $f=0$ offenbar einen Integralstreifen von der Form $(c,\ \mathfrak{P})$. Hat die Oberflächenschaar $\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$ keine Umhüllungsfläche, so ist die Gleichung $f=0$ nothwendig die der Planoide. Schneiden sich alle Oberflächen $\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$ in einer Kurve, die ihrerseits von der Oberfläche $f=0$ geschnitten wird, so muss letztere die Gleichung der Conoide sein.

Diskutiren wir z. B. die Gleichung:

$$f \equiv z - (\sqrt{x} + \alpha)^2 + (\sqrt{y} + \beta)^2 = 0$$

des Beispiels in §. 38. Sie giebt:

$$\sqrt{x} + \alpha + \gamma(\sqrt{y} + \beta) = 0.$$

Letztere Gleichung ist, γ als variabel angesehen, die Gleichung einer Schaar von Cylinderflächen, die senkrecht auf der xy Ebene stehen, und sich sämmtlich in der z Ordinate schneiden, welche den Fusspunkt $x=\alpha^2$, $y=\beta^2$ hat. Sonst schneiden sich diese Cylinderflächen nicht. Die Oberfläche $f=0$ schneidet die sämmtlichen Cylinderflächen und berührt die xy Ebene im Punkt $x=\alpha^2$, $y=\beta^2$. Lässt man nun α und β variiren, so kann man den Fusspunkt der Schnittlinie der Cylinderflächen, oder auch den Berührungspunkt der Fläche $f=0$ mit der xy Ebene überall hin im positiven Quadranten der xy Ebene verlegen. Die Charakteristiken der Gleichung $f=0$ schneiden sich alle im Punkt $x=\alpha^2$, $y=\beta^2$. Es ist sonach die Gleichung $f=0$ diejenige der Conoide der Gleichung: $z = xp^2 + yq^2$, welche ihre Spitze in der xy Ebene haben. Der Normalenkegel reducirt sich für die Punkte der xy Ebene als Spitze auf einen Strahl, der darauf senkrecht steht, weil man die Gleichung $xp^2 + yq^2 = 0$ im positiven Quadranten nur durch die Annahme $p=0$, $q=0$ erfüllen kann. Der Polarkegel wird ein Strahlenfächer, der in die xy Ebene fällt, u. s. f.

IX. Ueber die Intersectionen der Kegel und deren Enveloppen.

Für die nachfolgenden geometrischen Untersuchungen ist es besonders zweckmässig, über die Gestalt des Normalenkegels die Annahme des §. 6 zu machen, die indessen keine Einschränkung der Allgemeinheit der Resultate bedingt, da es hier nur darauf ankommt, die leitenden Principien für eine zweckmässige Diskussion der Gleichung $F=0$ und ihrer Integrale zu entwickeln. Wir setzen also voraus, die Directrix des Normalenkegels (und des Polarkegels) sei irgend eine geschlossene Kurve ohne Einbiegungen, Knicke und dergleichen.

Dies vorausgeschickt, gehe ich zur Betrachtung einiger

Eigenschaften der Durchschnittslinien der Kegel und Conoide über, für den Fall, wo ihre Spitzen einander sehr nahe liegen.

§. 41.

Die Durchschnittslinien der Kegel.

Wir betrachten zwei Kegelflächen, deren Spitzen einander sehr nahe liegen, und von denen die eine aus der anderen durch Variation gewisser Parameter entsteht. Die Gleichung der einen sei:

$$\Phi \equiv \Phi\ (x,\ y,\ z,\ a,\ b) = 0,$$

wo

$$a = \frac{x-\xi}{z-\zeta},\ b = \frac{y-\eta}{z-\zeta},$$

ξ, η, ζ sind die laufenden Coordinaten der Kegelfläche, x, y, z die festen der Kegelspitze. Die Gleichung der anderen sei dann:

$$\Phi_1 \equiv \Phi\ (x_1,\ y_1,\ z_1,\ a_1,\ b_1) = 0,$$

wo

$$x_1 - x = dx,\ y_1 - y = dy,\ z_1 - z = dz$$

ist. a, b und a_1, b_1, sind nach dem früheren die Neigungstangenten der Strahlen der Kegel $\Phi = 0$ und $\Phi_1 = 0$. Mithin lauten die Gleichungen des Strahls $(a,\ b)$:

$$\xi - x = a\,(\zeta - z),$$
$$\eta - y = b\,(\zeta - z).$$

Ich werde die partiellen Ableitungen von Φ nach x, y, z, a, b mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bezeichnen. Dann ist:

$$\mathfrak{A}\,(\xi_1 - x) + \mathfrak{B}\,(\eta_1 - y) = (\zeta_1 - z)\ \ (a\mathfrak{A} + b\,\mathfrak{B})$$

die Gleichung der Tangentialebene an den Kegel im Strahl $(a,\ b)$. Nennt man u und v die Neigungstangenten irgend eines vom Punkt xyz in der Tangentialebene ausgehenden Strahls, so dass:

$$\xi_1 - x = u\,(\zeta_1 - z),$$
$$\eta_1 - y = v\,(\zeta_1 - z),$$

so nimmt die Gleichung der Tangentialebene folgende Form an:

$$\mathfrak{A}\,(a - u) + \mathfrak{B}\,(b - v) = 0.$$

Die Durchschnittslinie der Kegel $\Phi = 0$ und $\Phi_1 = 0$ ist eine hyberbelartige Kurve und besteht aus zwei Zweigen, die um so näher an der Verbindungslinie der Spitzen beider Kegel vorbeigehen, je kürzer diese ist. Die Schnittlinie convergirt bei verschwindender Entfernung der Spitzen gegen ein sich in

der Kegelspitze kreuzendes Kurvenpaar, welches in unmittelbarer Nähe der Spitze mit zwei Strahlen zusammenfällt, aber keineswegs seiner ganzen Länge nach. Es wird sich vielmehr ergeben, dass nur unter besonderen Umständen ein Strahlenpaar der Kegelfläche die Grenze der Schnittlinie sein kann.

Suchen wir nun die Gleichung der Schnittlinie auf. Ich setze:

$$dx = udz,\ dy = vdz,$$

wo also u und v die Neigungstangenten der Verbindungslinie der Kegelspitzen bedeuten. Die Gleichung $\Phi_1 = 0$ giebt entwickelt:

$$(u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z})\, dz + \mathfrak{A}da + \mathfrak{B}db = 0.$$

Die laufenden Coordinaten ξ, η, ζ behalten für die Schnittlinie beider Kegel denselben Werth. Daher ist:

$$da = \frac{dz}{z-\zeta}\left\{ u-a \right\},\ db = \frac{dz}{z-\zeta}\left\{ v-b \right\}$$

und man findet:

$$\mathfrak{A}\,(a-u) + \mathfrak{B}\,(b-v) = (z-\zeta)\left\{u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}\right\}.$$

Diese Gleichung, und die Gleichung $\Phi=0$ gehören der Linie an, gegen welche die Schnittlinie convergirt, wenn die Kegelspitzen in einanderfallen, und welche wir, der Kürze wegen, Grenzschnittlinie nennen wollen. In diesen Gleichungen der Grenzschnittlinie sind ξ, η, ζ, (die in $a = \frac{x-\xi}{z-\zeta}$, $b = \frac{y-\eta}{z-\zeta}$ vorkommen) die laufenden Coordinaten der Grenzschnittlinie. Will man daher die Neigungstangenten a, b des Strahles finden, den sie beim Durchgang durch die Kegelspitze berührt, so hat man a und b in jenen Gleichungen unverändert zu lassen, dagegen $z-\zeta=0$ zu setzen, und erhält:

$$\mathfrak{A}\,(a-u) + \mathfrak{B}\,(b-v) = 0.$$

Lägen statt der Gleichung $\Phi=0$ der Kegelfläche die Gleichungen:

$$F\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0,$$
$$pa + qb = 1,$$
$$Pb - Qa = 0$$

vor, wo $F=0$ die Gleichung des Polarkegels des Kegels $\Phi=0$ vorstellt, und aus denen man durch Elimination von p und q die Gleichung $\Phi=0$ erhält, so würde das analoge Verfahren zu falschen Resultaten führen. Diese Gleichungen geben nämlich entwickelt:

$$DF \equiv Pdp + Qdq + (Xu + Yv + Z)\,dx = 0;$$
$$adp + bdq + pda + qdb = 0,$$
$$DPb - DQa + Pdb - Qda = 0,$$

wo DP und DQ ähnliche totale Differentiale wie DF bedeuten. Setzt man nun für da, db die oben angegebenen Werthe ein, schreibt p', q' statt $\frac{dp}{dz}$, $\frac{dq}{dz}$ und lässt dann die Differenzen $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$ verschwinden, so ergiebt sich Absurdes.

Der analytische Grund ist der, dass $\frac{dp}{dz}$ und $\frac{dq}{dz}$ ebensowohl wie:

$$\frac{da}{dz} = \frac{u-a}{z-\zeta}, \quad \frac{db}{dz} = \frac{v-b}{z-\zeta}$$

für $z-\zeta=0$ unendlich werden, und der geometrische Zusammenhang ist folgender. Denken wir uns von den Spitzen beider Kegel $\Phi=0$, $\Phi_1=0$ an einen endlich entfernten Punkt der Schnittlinie Strahlen gezogen, so werden diese, wenn die Spitzen einander sehr nahe liegen, einen sehr kleinen Winkel einschliessen. Wir lassen nun den Punkt, in dem sich die Strahlen treffen, die Schnittlinie durchlaufen in der Richtung der Verbindungslinie der Kegelspitzen. Je näher er ihr kömmt, um so grösser wird der Winkel zwischen den beiden Strahlen. Und während dieser Winkel gleichzeitig mit der Entfernung der Kegelspitzen verschwindet, wenn der bewegliche Punkt um ein Endliches von den Kegelspitzen entfernt ist, so bleibt er endlich, wenn der bewegliche Punkt sich in deren unmittelbarer Nähe befindet. Für die Punkte also, wo die hyperbelartige Schnittlinie umbiegt, um sich von der Verbindungslinie der Kegelspitzen wieder zu entfernen, bleiben da, db und mit ihnen dp, dq endlich, während die Kegelspitzen in einander fallen.

§. 42.

Abhängigkeit der Grenzschnittlinien von u und v.

Der Einfachheit halber wollen wir im Folgenden bei der allgemeinen Diskussion davon absehen, dass die Grenzschnittlinie aus zwei sich kreuzenden Kurven besteht, und nur eine beliebige von beiden näher untersuchen. Die Beschaffenheit der anderen wird sich dann von selbst ergeben und in wenigen Worten erörtert werden können.

Denken wir uns um die Spitze $x\,y\,z$ des Kegels $\Phi=0$ eine Kugel von sehr kleinem Halbmesser construirt, und die Spitze des Kegels $\Phi_1=0$ auf ihrer Oberfläche befindlich. Der Kegel $\Phi=0$ wird auf der Oberfläche der Kugel zwei Gebiete ausschneiden, deren Punkte alle innerhalb des Kegels liegen, und ein ringförmiges Gebiet wird dazwischen bleiben, dessen Punkte sich ausserhalb des Kegels befinden. Natürlich darf nur in das letztere Gebiet die Spitze des Kegels $\Phi_1=0$ verlegt werden, wenn man Schnittlinien der im vorigen §. beschriebenen Art erhalten will.

Die Gestalt der Schnittlinien wird nun variiren mit der Lage der beweglichen Kegelspitze auf der Kugeloberfläche. Die Neigungstangenten u und v des beide Kegelspitzen verbindenden Halbmessers sind die Parameter in den Gleichungen der Schnittlinie. Da nun aber die Schnittlinie in der Kegelspitze von einem Strahl des Kegels berührt werden muss, und der Kegel nur eine einfach unendliche Menge von Strahlen hat, während die Kugeloberfläche eine doppelt unendliche Menge von Punkten besitzt, so muss es auf der Kugel eine Schaar von Kurven geben, die folgende Beschaffenheit haben. Alle Schnittlinien der für die Punkte einer solchen Kurve construirten Kegel $\Phi_1=0$ mit dem Kegel $\Phi=0$ berühren sich in der Spitze des letzteren Kegels unter einander und fallen dort mit einem gewissen Strahl zusammen, der von Kurve zu Kurve variirt. Es liegt auf der Hand, welches das Gesetz dieser Kurven und wie der einer jeden von ihnen zugehörige Strahl zu finden sei. Die Gleichung für den Berührungsstrahl einer Schnittlinie im Punkte xyz war:

$$\mathfrak{A}(a-u)+\mathfrak{B}(b-v)=0.$$

Sind ξ_1, η_1, ζ_1 die laufenden Coordinaten der Schnittlinie, so ist dies, wenn man setzt:

$$u=\frac{x-\xi_1}{z-\zeta_1},\ v=\frac{y-\eta_1}{z-\zeta_1},$$

die Gleichung der Tangentialebene an den Kegel $\Phi=0$ im Strahl a, b. Die fragliche Kurvenschaar ist also nur die Schaar der grössten Kreise, in welchen eine bewegliche Tangentialebene an den Kegel $\Phi=0$ die Oberfläche der um seine Spitze construirten Kugel schneidet, und zu jedem Kreis gehört der von der Tangentialebene berührte Strahl.

Zieht man noch die andere Grenzschnittlinie in Betracht, so verhält sich die Sache, wie folgt. Wir können durch den Strahl (u, v) zwei Tangentialebenen an den Kegel $\Phi=0$ legen. Die beiden berührten Strahlen dieses Kegels seien (a, b) und (a', b'). Lässt man nun den Strahl (u, v) sich bewegen, jedoch so, dass er die den Strahl (a, b) berührende Tangentialebene nicht verlässt, so folgt ihm der Strahl (a', b'), der den einen Zweig der Grenzschnittlinie durch die Kegelspitze begleitet und nun beweglich ist, während der Strahl (a, b), der den anderen Zweig tangirt, fest bleibt.

§. 43.

Fortsetzung.

Man kann noch einen Schluss aus der Gleichung der Schnittlinie:

$$\mathfrak{A}(a-u)+\mathfrak{B}(b-v)=(z-\zeta)\{u\mathfrak{X}+v\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}\}$$

ziehen. Nimmt man nämlich an, es sei:

$$u\mathfrak{X}+v\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}=0,$$

so folgt:

$$\mathfrak{A}(u-u)+\mathfrak{B}(b-v)=0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung $\Phi=0$ kann man nun a und b eliminiren, und erhält eine Gleichung von der Form:

$$\Psi\equiv\Psi(x, y, z, u, v)=0,$$

welches offenbar wieder die Gleichung einer Kegelfläche ist, deren Spitze im Punkt xyz liegt. Andererseits geben jene beiden Gleichungen Werthe von a und b, die so geschrieben werden können:

$$x-\xi=U(\zeta-z),$$
$$y-\eta=V(\zeta-z),$$

In diesem Falle wird die Schnittlinie also eine Gerade und zwar kann sie nach dem Früheren nur der Strahl sein, welcher von der beide Kegelspitzen enthaltenden Tangentialebene an den Kegel $\Phi=0$ berührt wird.

Berücksichtigt man hier wieder beide Zweige der Grenzschnittlinie, so sieht man, dass beide Zweige in Geraden übergehen, wenn die Grössen u und v der Gleichung $\Psi=0$ genügen. Es sind dann die Strahlen, in welchen die zwei durch den

Strahl (u, v) gelegten Tangentialebenen den Kegel $\Phi=0$ berühren.

Was den Kegel $\Psi=0$ betrifft, so ist er von grosser Bedeutung in der Theorie der Gleichung $F=0$, und wegen einer später mitzutheilenden Eigenschaft, werde ich ihn den Facettekegel nennen.

Wir können die bisherigen Betrachtungen hinsichtlich der Schnittlinie der Kegel $\Phi=0$ und $\Phi_1=0$ folgendermassen zusammenfassen:

Man construire um die Spitze des Kegels $\Phi=0$ eine Kugel von unendlich kleinem Halbmesser, und markirte auf ihrer Oberfläche die Directrix des Kegels $\Psi=0$. Legt man nun an den Kegel $\Phi=0$ eine Tangentialebene in irgend einem Strahl (a, b) und lässt die Spitze des Kegels $\Phi_1=0$ den grössten Kreis durchlaufen, in welchem diese Tangentialebene die Kugeloberfläche schneidet, so ist die Grenzschnittlinie der Kegel $\Phi=0$, $\Phi_1=0$ eine Kurve, welche für alle Lagen der beweglichen Kegelspitze vom Strahl (a, b) im Punkt xyz berührt wird, mit diesem Strahle aber zusammenfällt, sobald die bewegliche Spitze in die Directrix des Kegels $\Psi=0$ gelangt.

§. 44.

Ueber die Umhüllungsflächen von Kegeln.

Construirt man für alle Punkte einer Kurve im Raume als Spitzen die Kegel $\Phi=0$, so werden diese von einer Oberfläche eingehüllt, welche der Ort ihrer successiven Schnittlinien ist. In dem besonderen Falle, wo die Gleichungen der räumlichen Kurve die totale Differentialgleichung:

$$\Psi\ (x, y, z, x', y') = 0$$

erfüllen, muss die Umhüllungsfläche eine Regelfläche sein, da die Schnittlinien in diesem Falle gerade Linien sind. Ich werde aber nachweisen, dass sie alsdann eine abwickelbare Oberfläche ist.

Diesen Beweis werde ich durch Construction führen.

Stellen wir uns vor, es seien für alle Punkte einer Ober-

fläche als Spitzen die Kegel $\Phi=0$ construirt. Um den Kegel, dessen Spitze im Punkt xyz liegt, werde durch den Strahl (a,b) eine Tangentialebene gelegt, welche die Oberfläche $M=0$ in einer Kurve schneidet, deren Tangente im Punkt xyz die Neigungstangenten u und v haben mag. Sind dx, dy, dz die Projectionen des Elements der Kurve, welches der Punkt xyz nach einer Richtung begrenzt, so ist demnach:

$$dx = u dz,$$
$$dy = v dz.$$

Die Tangentialebene an den Kegel xyz wird den Kegel $x_1=x+dx$, $y_1=y+dy$, $z_1=z+dz$ entweder schneiden oder berühren, oder endlich daran vorbeigehen. Den letzteren Fall wollen wir als irrelevant nicht weiter berücksichtigen, da dann die Tangentialebene, vom Punkt xyz aus nach der entgegengesetzten Seite verlängert, die Kegel schneidet, deren Spitzen in ihrer Spur auf der Oberfläche $M=0$ liegen. Auf den zweiten Fall kommen wir alsbald zurück, und nur der erste mag nun betrachtet werden.

Legen wir eine Tangentialebene an den Kegel $x_1y_1z_1$ in dem Strahl, welchen die erste Tangentialebene trifft, so gelangen wir auf der Spur der zweiten Tangentialebene, die im Punkte $x_1y_1z_1$ die Neigungstangenten:

$$u+du=u_1=\frac{dx_1}{dz_1},\ v+dv=v_1=\frac{dy_1}{dz_1}$$

haben möge, zur Spitze $x_2=x_1+dx_1$, $y_2=y_1+dy_1$, $z_2=z_1+dz_1$ eines dritten Kegels, an den wir in dem von der zweiten Tangentialebene getroffenen Strahl eine dritte Tangentialebene legen können, u. s. f. Die successiven Tangentialebenen werden umhüllt von einer Abwickelbaren, die aus ebenen Streifen von endlicher Breite besteht, so lange dx, dy, dz, etc. nicht verschwinden, und wir werden sofort sehen, dass letzteres im Allgemeinen nicht stattfinden darf, d. h. dass jene Abwickelbare im Allgemeinen keine stetige Oberfläche zur Grenze hat.

Es muss noch hinzugefügt werden, dass, wenn die Projectionen dx, dy, dz, u. s. f. hinreichend klein sind, einem Anfangspunkt xyz und einer Anfangsrichtung u, v unserer Construction stets zwei Abwickelbare entsprechen, da die erste Tangentialebene, wenn sie den Kegel $x_1y_1z_1$ überhaupt

schneidet, wegen der sehr geringen Entfernung der Spitzen zwei seiner Strahlen treffen muss.

Es seien nun a_1, b_1 die Neigungstangenten des Strahls des zweiten Kegels, den die Tangentialebene an den ersten Kegel trifft, und ich werde so alle auf den Kegel $x_1 y_1 z_1$ bezüglichen Grössen mit dem Index 1 versehen.

Aus der Gleichung der Tangentialebene an den ersten Kegel:

$$\mathfrak{A}(\xi_1 - x_1) + \mathfrak{B}(\eta_1 - y_1) = \zeta_1 - z_1) \{ a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} \}$$

folgt wegen:

$$a_1 = a + da = \frac{\xi_1 - x_1}{\zeta_1 - z_1}, \quad b_1 = b + db = \frac{\eta_1 - y_1}{\zeta_1 - z_1}$$

für da und db die Relation:

$$\mathfrak{A}\, da + \mathfrak{B}\, db = 0.$$

Hierzu kommt noch die andere:

$$\Phi_1 = 0.$$

Diese, unter Berücksichtigung der Relationen:

$$dx = u dz, \; dy = v dz, \; \mathfrak{A}\, da + \mathfrak{B}\, db = 0$$

entwickelt, giebt eine Gleichung von der Form:

$$0 = (\mathfrak{X} u + \mathfrak{Y} v + \mathfrak{Z})\, dx + H_1 dx^2 + H_2 dx da + H_3 da^2 + \text{etc.},$$

wo die Coefficienten H_1, H_2, H_3 auf bekannte Weise aus den zweiten Differentialquotienten von Φ zusammengesetzt sind.

Aus dieser Entwicklung geht hervor, dass da und db nur dann von der Ordnung dx sind, wenn man setzt:

$$\mathfrak{X} u + \mathfrak{Y} v + \mathfrak{Z} = 0,$$

sonst sind jene Differentiale niederer Ordnung*). Aus der Gleichung der Tangentialebene an den Kegel $x_1\, y_1\, z_1$ folgt noch:

$$\mathfrak{A}_1 (a_1 - u_1) + \mathfrak{B}_1 (b_1 - v_1) = 0$$

und diese Gleichung giebt entwickelt eine Gleichung von der Form:

$$0 = K dx + K_1 dy + K_2 dz + K_3 da + K_4 db + K_5 du + K_6 dv + \text{ etc.},$$

woraus sich, wie auch anderweitig einleuchtet, ergiebt, dass du und dv von der Ordnung da, db sind.

Die Spur der oben construirten Abwickelbaren auf der

---

*) Eine dieser ähnliche Betrachtung wird im letzten Abschnitt dieser Untersuchung genauer durchgeführt werden.

Fläche $M=0$ ist also eine polygonale Linie, deren Contingenzwinkel niederer Ordnung sind, als die Polygonseiten, aus denen sie zusammengesetzt ist: mit Ausnahme des Falles, wo man hat:

$$\mathfrak{X}u+\mathfrak{Y}u+\mathfrak{Z}=0.$$

Daher wird in diesem Falle und nur in diesem ein Grenzübergang zulässig sein. Auf die eigenthümliche Art des Contacts der Abwickelbaren mit den Kegeln Φ, welche sie einhüllt, komme ich im Laufe dieser Betrachtungen zurück.

Zieht man hier wieder beide Zweige der Grenzschnittlinie in Rechnung, so übersieht man leicht, dass durch jede der Kurven auf der Oberfläche $M=0$, welche die Gleichung:

$$\mathfrak{X}u+\mathfrak{Y}v+\mathfrak{Z}=0$$

erfüllen, zwei Abwickelbare gelegt werden können, welche die für ihre Punkte als Spitzen construirten Kegel $\Phi=0$ umhüllen.

Wir können die Ergebnisse dieses §. folgendermassen zusammenfassen:

Construirt man für die Punkte irgend einer Kurve auf einer Oberfläche die Kegel $\Phi=0$, so werden diese eingehüllt von Oberflächen, deren geometrischer Charakter im Allgemeinen complicirt ist. Sie sind der Ort der Grenzschnittlinien, deren Gesetz wir oben entwickelt haben. Eine Schaar von Kurven giebt es aber auf jeder Oberfläche, von der Beschaffenheit, dass die zu den Punkten einer jeden von ihnen als Spitzen construirten Kegel von Abwickelbaren eingehüllt werden.

Man erhält diese Schaar aus den Gleichungen $M=0$ und $\Psi(x, y, z, x', y')=0$ auf dieselbe Weise, wie in §. 12 die Schaar Integralkurven der totalen Gleichung $\Phi=0$, welche auf der Oberfläche $U=0$ liegen, zu construiren gelehrt wurde*).

---

*) Lässt man die eingangs dieses Capitels gemachte Voraussetzung fallen, so leuchtet ein, dass, jenachdem der Kegel $\Psi=0$, wenn seine Spitze auf der Oberfläche $M=0$ liegt, von ihr in 1, 2 oder mehreren Strahlen geschnitten wird, es auf dieser Oberfläche eine, zwei oder mehrere Kurvenschaaren giebt, längs deren die Kegel $\Phi=0$ von Abwickelbaren eingehüllt werden.

Ausserdem geht von jedem Punkt der Oberfläche eine Doppelschaar von polygonalen Linien aus, längs welcher die Kegel von Abwickelbaren aus endlich breiten Streifen bestehend eingehüllt werden.

X. Ueber die Intersectionen der Conoide und deren Enveloppen.

§. 45.

Die Schnittlinien der Conoide.

Nachdem wir die Schnittlinien der Kegel untersucht haben, ist über diejenigen der Conoide kaum etwas zu bemerken. Es seien zwei Conoide gegeben, deren Spitzen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ einander sehr nahe liegen, so schneiden diese sich ebenfalls in einer Kurve, die, einer Hyperbel vergleichbar, zwei Zweige besitzt, bei verschwindender Entfernung der Spitzen aber mit einer Charakteristik verschmilzt*). Diese Charakteristik ist diejenige, welche im Punkt $\mathfrak{P}$ berührt wird von derjenigen Tangentialebene an das Conoid $\mathfrak{P}$ in diesem Punkt, die durch den Punkt $\mathfrak{P}_1$ geht. Wir gehen somit zu den Umhüllungsflächen der Conoide über.

§. 46.

Umhüllungsflächen der Conoide.

Erstens. Wenn die Spitzen der umhüllten Conoide auf einem Conoid liegen.

Beginnen wir mit der Enveloppe der Conoide, die für die Punkte einer auf einem Conoid $\mathfrak{P}$ befindlichen Kurve als Spitzen construirt werden. Das Conoid $\mathfrak{P}$ ist diese Enveloppe (§. 32). Setzen wir bei Conoiden eine ähnliche Gestalt wie bei den Kegeln voraus, so hat ein Conoid allerdings zwei Enveloppen. Davon wird später die Rede sein.

1. Ich denke mir zwei Punkte: $\mathfrak{P}\,(x, y, z)$, $\mathfrak{P}_1\,(x_1, y_1, z_1)$ als Spitzen von Conoiden auf einer Charakteristik. Das Conoid $\mathfrak{P}$ kehre dem Punkt $\mathfrak{P}_1$ seine Oeffnung zu und das Conoid $\mathfrak{P}_1$ dem Punkt $\mathfrak{P}$ die seinige. Ihre Gleichungen werden sein:

*) Eigentlich (unter der eingangs des Capitels gemachten Voraussetzung) mit zwei Charakteristiken, die sich in der Conoidspitze schneiden. Es gilt hier von den doppelten Grenzschnittlinien, dasselbe, was darüber im vorigen Capitel gesagt wurde.

$$f \equiv f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0,$$
$$f_1 \equiv f(x_1, y_1, z_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0,$$

wo ξ, η, ζ; ξ_1, η_1, ζ_1 die laufenden Coordinaten der Conoide $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ bezeichnen. Jetzt denke ich mir den Punkt $\mathfrak{P}_1$ einer Kurve auf dem Conoid $\mathfrak{P}$ angehörig, und zu deren sämmtlichen Punkten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_1''$, etc. die Conoide construirt. Beziehen wir in ihren Gleichungen die laufenden Coordinaten auf den Punkt $\mathfrak{P}$, den sie alle gemein haben, so werden sie:

$$f(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0,$$
$$f(x_1', y_1', z_1', x, y, z) = 0,$$
etc.

wo x_1' y_1' z_1' etc. die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{P}_1'$ etc. bedeuten. Da aber der Punkt $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ eine ganz beliebige Lage auf dem Conoid $\mathfrak{P}$ hat, so können wir statt seiner Coordinaten $x_1^{(n)}$, $y_1^{(n)}$, $z_1^{(n)}$ die laufenden Coordinaten ξ, η, ζ des Conoids $\mathfrak{P}$ setzen und es muss:

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) = 0$$

identisch mit der Gleichung des Conoids $\mathfrak{P}$:

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

sein. Dieses ist die geometrische Herleitung der analytisch sich von selbst ergebenden Bemerkung (§. 39), dass die Variabeln: x, y, z mit den x_1, y_1, z_1 in der Gleichung:

$$f(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$$

vertauscht werden können.

Aus der geometrischen Eigenthümlichkeit der Conoide, dass jedes die anderen umhüllt, deren Spitzen auf seiner Oberfläche liegen, ergeben sich noch einige andere Consequenzen, von denen ich folgende anführe.

II. Es seien $-p_1$ und $-q_1$ die Neigungstangenten der Strahlen des für den Punkt $\mathfrak{P}_1$ construirten Normalenkegels. Sieht man nun die Gleichung:

$$f(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$$

als diejenige des Conoids an, dessen Spitze im Punkt $\mathfrak{P}$ (x, y, z) liegt, so folgt daraus:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0,$$

welche Formeln auch dem Conoid $\mathfrak{P}_1$ angehören. Man kann sie direkt ableiten, indem man sich den Punkt $\mathfrak{P}_1$ in der Richtung u, v verschoben denkt und darauf diese Richtung variirt, ohne dass sie die Tangentialebene an das Conoid $\mathfrak{P}_1$ im Punkt $\mathfrak{P}_1$ verlässt. Dann ist:

$$up_1 + vq_1 = 1,$$
$$\delta u p_1 + \delta v q_1 = 0,$$
$$\frac{df}{dx_1} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x^1} \delta u + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta v = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich die Obigen durch Elimination von u, v, δu, δv.

III. Bezieht man demnach die Variabeln der Gleichung $F=0$ einmal auf den Punkt $\mathfrak{P}$, das andere Mal auf den $\mathfrak{P}_1$, wodurch man die zwei Differentialgleichungen für f erhält:

$$F\left(x,\ y,\ z,\ -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}},\ -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = 0,$$

$$F\left(x_1,\ y_1,\ z_1,\ -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}},\ -\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}\right) = 0,$$

so stehen diese beiden Gleichungen in der Verbindung, dass die unabhängigen Variabeln x, y, z der einen die Integrationsconstanten der anderen sind, und umgekehrt.

IV. Ferner ist klar, dass, wenn man aus den Gleichungen:

$$f = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

zwei von den Variabeln x_1, y_1, z_1 eliminirt, die dritte von selbst herausfallen muss, denn man würde ihr ja unabhängig von den übrigen Variabeln beliebige Werthe ertheilen können, da man, ohne die Grösssen x, y, z, p, q zu verändern, die Conoidspitze $x_1 y_1 z_1$ auf einer Charakteristik beliebig verschieben kann.

V. Endlich bezeichne D die Variation der Spitze längs der Chakteristik, auf welche sich die Werthe x, y, z, p, q

(p und q als Funktionen von x, y, z, x_1, y_1, z_1 gedacht) beziehen, so ist:

$$Df = 0, \ Dp = 0, \ Dq = 0$$

und aus diesen drei Gleichungen folgt durch Elimination von dx_1, dy_1, dz_1 eine Partielle zweiter Ordnung, der die Funktion f genügen muss, nämlich:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial p}{\partial y_1}\frac{\partial q}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\frac{\partial q}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial z_1}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\frac{\partial q}{\partial y_1}\right) = 0.$$

Dieselbe Gleichung ist auch das Resultat der Bemerkung ad IV.

§. 47.

Fortsetzung. Ueber die Art, wie die Conoide den Raum ausfüllen.

Um uns hiervon ein Bild zu verschaffen, stellen wir uns noch immer vor, die Conoide seien in der Weise geschlossene Oberflächen, dass die Kurven, welche die Punkte gleicher Distanz von der Spitze verbinden, geschlossen sind. Dies wird der Fall sein, wenn der Polarkegel die in §. 6 vorausgesetzte Form hat. Nun denke man sich zwei Oberflächen I und II in so geringer Entfernung von einander durch den Raum gelegt, dass die für Punkte der einen als Spitzen construirten Conoide, bis sie die zweite Oberfläche treffen, nicht sehr von der Kegelgestalt abgewichen sind. Betrachten wir jetzt das Conoid $\mathfrak{P}$, dessen Spitze im Punkt $\mathfrak{P}$ der Oberfläche I liegt. Es schneidet die Oberfläche II in der Kurve K. Construirt man nun für die Punkte der Kurve K_1 die Conoide, die ihre Oeffnung nach der Oberfläche I kehren, so werden diese eingehüllt einerseits vom Conoid $\mathfrak{P}$, andererseits von einer Oberfläche $(K_1\,K_2)$, die die Oberfläche I in der Kurve K_2 trifft. Die für die Punkte der Kurve K_2 construirten Conoide werden einerseits von der Oberfläche $(K_1\,K_2)$ eingehüllt, andererseits von einer Oberfläche $(K_2\,K_3)$, die die Oberfläche II in einer Kurve K_3 schneidet, u. s. f. Kurz die Umhüllungsflächen der Conoide werden von der einen Oberfläche zur anderen reflectirt, so dass sie die Oberflächen in immer weiteren Kreisen treffen. Diese Construction lässt sich für alle Punkte der Oberfläche I wiederholen, und man erhält auf diese Weise alle Charakteristiken, welche zwischen beiden Oberflächen enthalten sind.

§. 48.

Ueber die Umhüllungsflächen der für die Punkte beliebiger Kurven als Spitzen construirten Conoide.

Alle Integraloberflächen der Gleichung $F=0$ kann man als Conoidenveloppen ansehen. Diese Vorstellungsweise bietet hinsichtlich der Rückkehrkanten Vortheile dar. Zunächst indessen einige allgemeine Bemerkungen.

Giebt man den Gleichungen der Charakteristiken die Form:

$$\lambda\,(x_1,\,y_1,\,z_1,\,p_1) = \lambda\,(x,\,y,\,z,\,p),$$
$$\lambda_1\,(x_1,\,y_1,\,z_1,\,p_1) = \lambda_1(x,\,y,\,z,\,p),$$
$$\lambda_2\,(x_1,\,y_1,\,z_1,\,p_1) = \lambda_2(x,\,y,\,z,\,p),$$

so enthalten sie die vier Constanten x_1, y_1, z_1, p_1, die man auf drei reduciren kann, dadurch, dass man den festen Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ in irgend eine Oberfläche $z_1 = \psi\,(x_1,\,y_1)$ verlegt. Allein es muss bemerkt werden, dass dadurch die Allgemeinheit der Gleichungen insofern eine Beschränkung erfährt, als gemeiniglich nicht alle Charakteristiken durch die Oberfläche gehen werden, und die Constanten für die übrigen Charakteristiken imaginäre Werthe erhalten. Die Charakteristiken der Differentialgleichung:

$$p^2 + q^2 = \text{constans}$$

erhält man z. B. nicht sämmtlich, wenn die Oberfläche $\psi = 0$ eine Kugel ist, sondern nur diejenigen, welche innerhalb der zwei die Kugel tangirenden Polarkegel: $1 = \text{const.}\ (a^2 + b^2)$ verlaufen.

Die Gleichung der Conoide:

$$f\,(x_1,\,y_1,\,z_1,\,x,\,y,\,z) = 0$$

lässt sich ebenfalls von einer Constanten befreien, wenn man annimmt, die Conoidspitzen liegen auf einer Oberfläche:

$$z_1 = \psi\,(x_1,\,y_1).$$

Dann wird sie:

$$f\,(x_1,\,y_1,\,\psi,\,x,\,y,\,z) = 0.$$

In dieser Form stellt sie ein Integral mit zwei Constanten der Gleichung $F=0$ dar. Die so eben in Betreff der Integralcharakteristiken gemachte Bemerkung erstreckt sich dann auch auf die Conoide.

Ich nehme an, die Spitzen der Conoide befinden sich auf irgend einer Kurve auf der Oberfläche $z_1 = \psi$, deren Projection auf die xy Ebene die Gleichung:

$$\varphi(x_1, y_1) = 0$$

hat. Man erhält die Gleichung der Hülle der Conoide durch Differentiation nach x_1 und findet:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} dy_1 = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0.$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ x_1 und y_1 eliminirt, ergiebt sich die Gleichung der Umhüllungsfläche der Conoide. Es ist das System dieser drei Gleichungen mithin das Integral mit einer willkürlichen Funktion oder das allgemeine Integral. Man kann daraus direkt alle Integrale der Gleichung $F=0$ durch geeignete Verfügung über die Funktion φ herleiten, mit Ausnahme der Conoide, die ihre Spitze in der Oberfläche $z_1 = \psi$ haben. Um diese Conoide daraus abzuleiten, könnte man indessen für $\varphi = 0$ die Gleichung eines Kreises einsetzen und darauf dessen Halbmesser verschwinden lassen.

Dem allgemeinen Integral lässt sich noch eine andere Form geben. Da nämlich durch eine zwischen gewissen Grenzen beliebige räumliche Kurve eine Integraloberfläche gelegt werden kann, so enthält es scheinbar zwei willkürliche Funktionen. Es seien die Gleichungen der willkürlichen Kurve:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$\psi(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Diese Gleichungen und die Gleichung $f(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$ nach x_1, y_1, z_1 total differenzirt und die Differentiale dx_1, dy_1, dz_1 eliminirt, folgt:

$$N \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{\partial \psi}{\partial z_1}\right) - \frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial z_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\right) = 0,$$

und setzt man $\varphi \equiv x_1 - \varphi(z_1)$, $\psi \equiv y_1 - \psi(z_1)$, so wird diese Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi'(z_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}\psi'(z_1) + \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0,$$

welche mithin im Verein mit den Gleichungen:

$$f = 0,$$

$$x_1 = \varphi(z_1),$$

$$y_1 = \psi(z_1)$$

ebenfalls das allgemeine Integral der Gleichung $F=0$ repräsentirt. Dieses ist insofern eine allgemeinere Form des Integrals, als man daraus ohne Ausnahme alle partikulären Integrale erhalten kann. Denn man muss z. B. die Gleichung irgend eines Conoids daraus erhalten können, indem man die Gleichung der Enveloppe der Conoide aufstellt, deren Spitzen in einer Kurve auf der Fläche des gesuchten Conoids liegen.

§. 49.

Ueber die Grenzbedingungen im Allgemeinen.

Es sei ferner irgend ein anderes Integral mit zwei Constanten:

$$f_\alpha \equiv f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

z. B. die Gleichung der Planoide vorgelegt. Alsdann erhält man die Enveloppe dieser Oberflächen, die irgend eine gegebene Kurve:

$$\varphi\,(x_1, y_1, z_1) = 0,$$
$$\psi\,(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

tangiren, durch Elimination von α, β, x_1, y_1, z_1 aus den Gleichungen:

$$f_\alpha \equiv f\,(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$
$$f_{\alpha 1} \equiv f\,(x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta) = 0,$$
$$D_{01} \equiv \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha}\,\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \beta}\right) = 0,$$
$$\varphi = 0,\ \psi = 0,$$
$$N_1 \equiv \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\,\frac{\partial \psi}{\partial z_1}\right) - \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,\frac{\partial \psi}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial z_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\right) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich dann die Bedingung dafür, dass eine Integraloberfläche durch eine Reihe von Kurven K, K_1 … gelegt werden könne. Es müssen gleichzeitig erfüllt werden die Gleichungen:

$$f = 0,\quad f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \text{etc.},$$
$$D_{01} = 0,\ D_{02} = 0,\ \text{etc.},$$
$$\varphi = 0,\quad \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \text{etc.},$$
$$\psi = 0,\quad \psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0,\ \text{etc.},$$
$$N_1 = 0,\quad N_2 = 0,\ \text{etc.},$$

wo die Indices keiner Erläuterung bedürfen.

Die allgemeinste Gestalt, welche man diesen Grenzbedingungen geben kann, ist folgende.

Die Gleichung $f_{\alpha 1}=0$ giebt differenzirt:

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial z_1}=0,$$
$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial y_1}+q_1\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial z_1}=0.$$

Neben diesen Gleichungen bedarf es offenbar noch dreier, um x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 eliminiren und β als Funktion von α bestimmen zu können. Bisher benutzten wir die Gleichungen der Kurve $\varphi=0$, $\psi=0$ und ausser diesen die Gleichung $p_1 x_1'+q_1 y_1'=1$, in der x_1' und y_1' durch Differentiation von $\varphi=0$, $\psi=0$ erhalten wurden. Wir können aber als Grenzbedingungen drei beliebige Gleichungen einführen:

$$L\ (x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1)=0,$$
$$L'\ (x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1)=0,$$
$$L''\ (x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1)=0,$$

deren Sinn dann folgender ist. Auf die Form:

$$\lambda\ (x_1,\ y_1,\ z_1)=0,$$
$$p_1-\lambda'\ (x_1,\ y_1,\ z_1)=0,$$
$$q_1-\lambda''\ (x_1,\ y_1,\ z_1)=0$$

gebracht, bedeutet die erste, die Integraloberfläche müsse durch die gegebene Oberfläche $\lambda=0$ gehen. Die zwei anderen sagen aus, dass in jedem Punkte der Schnittlinie der beiden Oberflächen die Richtung der Normale an die Integraloberfläche eine gegebene Funktion der Coordinaten ihres Fusspunkts sei.

Wir haben bei diesen Bestimmungen der willkürlichen Funktion des allgemeinen Integrals die zwei Constanten α und β nur als analytische Grössen betrachtet. Um ihnen eine geometrische Bedeutung beizulegen, hat man sie z. B. zu bestimmen durch den Punkt ξ, wo die Integraloberfläche $f_\alpha=0$ die Linie:

$$y=c,$$
$$z=0$$

schneidet. Dies giebt zunächst:

$$f\ (\xi,\ c,\ o,\ \alpha,\ \beta)=0,$$

und dann durch die Tangente τ des Winkels, unter dem dies geschieht, wobei man noch die Gleichungen:

$$\frac{\partial f\ (\xi,\ c,\ o,\ \alpha,\ \beta)}{\partial \xi}+\tau\frac{\partial f\ (\xi,\ c,\ o,\ \alpha,\ \beta)}{\partial c}=0$$

erhält.

Es sei nun, um diese Betrachtungen über die Enveloppen der Integraloberflächen zum Abschluss zu bringen, irgend eine Kurve K gegeben, und wir fassen auf ihr die Punkte $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ etc. ins Auge. Wir legen eine zweite Kurve K_1 durch den Raum, die, übrigens beliebig gestaltet, durch die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ... geht, und in diesen Punkten mit der Kurve K von denselben Tangentialebenen an die Polarkegel $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ ... berührt wird: so ist nach dem früheren klar, dass die Integraloberflächen, welche man durch beide Kurven K und K_1 legt, die durch die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ... gehenden Integralcharakteristiken gemein haben und sich längs derselben berühren werden. Mithin ist eine Integraloberfläche der Gleichung $F=0$ eben so wenig wie eine solche der Gleichung $Ap+Bq=1$ (§. 16) bestimmt durch die Bedingung, dass sie durch eine oder eine endliche Anzahl von Charakteristiken gehen solle. Es besteht aber zwischen beiden Gattungen von Integraloberflächen der Unterschied, dass die ersteren sich längs einer Charakteristik, die sie gemein haben, berühren müssen, die zweiten nicht (§. 32). Man kann diesen Unterschied auch so definiren, dass man sagt: Integraloberfläche der Gleichung $F=0$ ist nicht eine jede, die der Ort einer Schaar von Integralcharakteristiken ist, wie dies von der Gleichung $Ap+Bq=1$ gilt. Umgekehrt: Ist eine Schaar von Integralcharakteristiken so beschaffen, dass längs irgend einer Kurve, welche durch diese Charakteristiken geht, die durch die aneinanderstossenden Elemente der Kurve und der Charakteristik gehende Ebene jedesmal den zum Element der Charakteristik gehörigen Polarkegel tangirt, so ist der Ort der Schaar von Charakteristiken eine Integraloberfläche.

Hieraus geht das Corollar hervor, dass der Ort sich successiv schneidender Integralcharakteristiken allemal eine Integraloberfläche ist, da in den Schnittpunkten die sich schneidenden Charakteristiken von zwei unendlich nahen Strahlen der für die Schnittpunkte als Spitzen construirten Polarkegel tangirt werden. Diese Bemerkung führt uns zu dem wichtigen Thema der Rückkehrkanten, welches im folgenden Kapitel abgehandelt werden wird.



XI. Rückkehrkanten und osculatorische Umhüllungsoberflächen.

§. 50.

Analogie zwischen der Gleichung $F(p, q) = 0$ und $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Es bleibt uns nun noch übrig, die Analogie zwischen den Integraloberflächen der Gleichung $F(p, q) = 0$ und denen der allgemeineren $F(x, y, z, p, q) = 0$ zu vervollständigen.

Die Integraloberflächen der Gleichung $F(p, q) = 0$ zerfallen in Kegel, Ebenen und Abwickelbare. Die beiden ersten Klassen haben wir bei der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ als Conoide und Planoide wieder gefunden. Wir werden nun sehen, dass die letztere Klasse aus allen übrigen Integraloberflächen besteht, die dann aus Streifen von der Form $(c, \mathfrak{P})$ zusammengesetzt sind, wo $\mathfrak{P}$ von einen Streifen zum andern variirt. Wir wollen die Integralstreifen durch Angabe der beiden sie begrenzenden Charakteristiken C, C_1 und deren Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ bezeichnen, wie folgt:

$$(c, \mathfrak{P}, c_1),$$

nicht weil unsere frühere Bezeichnungsweise unbestimmt war, sondern weil hier diese Bezeichnung, wie sofort einleuchten wird, übersichtlicher ist.

Unter der Annahme, die Charakteristiken seien keine geschlossenen Kurven, hat man die zwei Gattungen von Integralstreifen:

$$(c, \mathfrak{P}, c_1), \ (c, \infty, c_1).$$

Die Zusammensetzung der Conoide ist folgende:

$$(c, \mathfrak{P}, c_1), \ (c_1, \mathfrak{P}, c_2), \ (c_2, \mathfrak{P}, c_3), \text{ etc.}$$

In ihnen hat $\mathfrak{P}$ parametrische Bedeutung. Rückt $\mathfrak{P}$ in die Unendlichkeit, so entstehen die Planoide:

$$(c, \infty, c_1), \ (c_1, \infty, c_2), \ (c_2, \infty, c_3), \text{ etc.}$$

Ist endlich $\mathfrak{P}$ von einem Integralstreifen zum anderen variabel, wodurch man bei geradlinigen Charakteristiken Abwickelbare erhält, so entstehen Oberflächen, die zusammengesetzt sind aus Integralstreifen von folgender Form:

$$(c, \mathfrak{P}, c_1), \ (c_1, \mathfrak{P}_1, c_2), \ (c_2, \mathfrak{P}_2, c_3), \text{ etc.}$$

und auf die so erzeugten Integraloberflächen will ich jetzt näher eingehen*).

§. 51.

Die Rückkehrkante oder Grenzcharakteristik.

Die Charakteristiken $C, C_1, C_2, C_3, \ldots,$ welche die Streifen:

$$(c, \mathfrak{P}, c_1),\ (c_1, \mathfrak{P}_1, c_2),\ (c_2, \mathfrak{P}_2, c_3),\ \text{etc.}$$

bilden, schneiden sich successiv und zwar: C_1 schneidet C im Punkt $\mathfrak{P}$; C_2 schneidet C_1 im Punkt $\mathfrak{P}_1$; C_3 schneidet C_2 im Punkt $\mathfrak{P}_2$; u. s. f. Die Kurve, welche der Ort der Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ ist, hüllt die Charakteristiken $C, C_1, C_2, \ldots$ ein und ihre Gleichungen müssen die Gleichung des Polarkegels:

$$\Phi(x, y, z, x', y') = 0,$$

als totale Differentialgleichung aufgefasst, befriedigen, da ihre Elemente: die Verbindungslinien von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$, von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$, u. s. f. Strahlen der Polarkegel $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ sind.

Die Integralkurven der Gleichung $\Phi=0$ zerfallen also, wie wir erkennen, in die Integralcharakteristiken, und in solche Kurven, welche, als Hüllen der Integralcharakteristiken, die Integraloberflächen begrenzen, und die wir zum Unterschied von den ersteren Grenzcharakteristiken nennen wollen.

Um nun deren Rolle wohl zu durchschauen, empfiehlt es sich, zu einer gegebenen Grenzcharakteristik die zugehörige Integraloberfläche zu construiren, und zwar werde ich sie als Conoidenveloppe darstellen.

Es sei gegeben irgend eine Kurve, deren Gleichungen die Gleichung $\Phi = 0$ erfüllen, und die nicht gerade eine Integralcharakteristik ist. Wir wollen uns diese Kurve zunächst polygonal vorstellen, d. h. zusammengesetzt aus sehr kurzen Linienelementen, die dann offenbar ein jedes mit einem Strahl

*) Es muss noch hinzugefügt werden, dass, wenn die Charakteristiken geschlossene Kurven sind, oder so beschaffene Zweige haben, zu den erwähnten Klassen von Integralstreifen eine dritte hinzukommt, die übrigens zweifelsohne, ähnlich wie ich dies bei den Kanalflächen (§. 39) gezeigt habe, sich vermöge einer kleinen Veränderung in der Definition zu den Integralstreifen $(c, \mathfrak{P}, c_1)$ wird gesellen lassen.

des für seinen Anfangspunkt als Spitze construirten Polarkegels zusammenfallen werden. Es seien $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... die Eckpunkte der betrachteten polygonalen Grenzcharakteristik.

Für den Punkt $\mathfrak{P}$ als Spitze construiren wir das Conoid $\mathfrak{P}$. Das die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ verbindende Linienelement $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ berührt eine gewisse Integralcharakterisik C des Conoids $\mathfrak{P}$. Für den Punkt $\mathfrak{P}_1$ als Spitze construiren wir das Conoid $\mathfrak{P}_1$. Dieses wird das Conoid $\mathfrak{P}$ längs der ganzen Charakteristik C berühren. Das Linienelement $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ berührt dann eine zweite Charakteristik C_1, welche durch den Punkt $\mathfrak{P}_1$ geht, und dort die Charakteristik C schneidet unter dem Winkel der Linienelemente $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ und $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ gegeneinander. Nun construiren wir das Conoid $\mathfrak{P}_2$, welches das Conoid $\mathfrak{P}_1$ längs C_1 berührt, und auf diesem Conoid gelangen wir auf dem Strahl $\overline{\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3}$ zum Punkt $\mathfrak{P}_3$, zu dem das Conoid $\mathfrak{P}_3$ construirt wird, u. s. f. Nachdem wir so alle Conoide $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, etc. construirt haben, finden wir, dass das Conoid $\mathfrak{P}_1$ im Conoid $\mathfrak{P}$, das Conoid $\mathfrak{P}_2$ im Conoid $\mathfrak{P}_1$, steckt, u. s. f.

Da die Conoide sich successiv berühren, so haben sie auch eine Umhüllungsfläche. Allein diese Umhüllungsfläche hat besondere Eigenschaften, durch welche sie sich von den gewöhnlich betrachteten Umhüllungsflächen unterscheidet. Eine Umhüllungsfläche wird gemeiniglich angesehen als Ort der successiven Durchschnittslinien einer Oberflächenschaar. Sie wird von den einzelnen Individuen der Schaar berührt, während diese sich in ihr schneiden. Mithin liegt die Oberflächenschaar ganz an der einen Seite der Umhüllungsfläche. Die Enveloppe der Conoide $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... hat gerade die entgegengesetzten Eigenschaften: sie schneidet die umhüllten Flächen, diese berühren sich in ihr und liegen an ihren beiden Seiten. Umhüllungsflächen und Kurven der letzteren Art werde ich, wegen ihrer sofort anzugebenden Haupteigenschaft »osculatorische« nennen.

Was die alsbald zur Sprache kommende Osculation von Oberflächen betrifft, so habe ich darüber Folgendes vorauszuschicken. Man kann zwei Arten der Osculation von Oberflächen unterscheiden, die eine, die »punktuelle«, die gewöhnlich untersucht wird, spielt in dieser Theorie keine Rolle. Es handelt sich hier nur um die Osculation in Linien. Be-

rühren sich zwei Oberflächen längs einer Linie, so haben sie in allen Punkten der Linie nach dem Meusnier'schen Satze die Krümmungshalbmesser der diese Linie tangirenden Normalschnitte gemein. Osculiren sich nun irgend zwei durch einen Punkt 𝔓 der Berührungslinie der Oberfläche gehende Kurven in diesem Punkt 𝔓, so haben die beiden Oberflächen noch den Krümmungshalbmesser des die transversalen Kurven tangirenden Normalschnitts gemein. Wenn aber zwei Oberflächen im Berührungspunkt die Krümmungshalbmesser irgend zweier Normalschnitte gemein haben, so haben sie, wie aus der Betrachtung der indicatorischen Linie Dupin's hervorgeht, dort alle Krümmungshalbmesser gemein, d. h. sie osculiren sich. Die Oberflächen osculiren sich also im Punkt 𝔓, und wir können nun die Osculation in Linien so definiren: Sie findet Statt, wenn zwei Oberflächen sich längs einer Linie berühren, und für alle Punkte dieser Linie die Krümmung irgend eines Normalschnittes gemein haben, mit anderen Worten: wenn in der Berührungslinie die Schnittlinien der beiden Oberflächen mit irgend einer Ebene drei Punkte mit einander gemein haben. So werden wir sagen, die Oberflächen gehen einen Contact von der $n$ten Ordnung ein, wenn jene Schnittlinien $n+1$ Punkte gemein haben. Es findet dann längs der ganzen Berührungslinie ein Contact von der $n$ten Ordnung statt*).

Ich gehe nun zur Betrachtung der osculatorischen Hüllen über und zwar der ebenen Kurven, da dies für die Folge ausreicht.

§. 52.

Bemerkungen über die osculatorischen Umhüllungslinien von ebenen Kurven.

Diese Umhüllungslinien sind sehr mannigfacher Art. Als unzweckmässig erweiset sich bei genauerer Untersuchung die rein analytische Definition derselben als solcher Kurven, die

---

*) Von dieser Osculation der Oberflächen in Linien habe ich nirgends eine Erwähnung gefunden, mit Ausnahme einer Note, welche Olivier seinem *Mémoire de Géometrie* (Ec. Pol. Cah. 25) hinzufügt. Die Note befindet sich S. 145. Er behandelt indessen dort Fragen, die mit dem hier vorliegenden in keinem Zusammenhange stehen.

nicht durch Specialisirung des constanten Werths des Parameters in der Gleichung der umhüllten Kurvenschaar erhalten werden können. Geometrisch hat bisweilen ein partikuläres Integral der Differentialgleichung der Kurvenschaar dieselben Eigenschaften als ein singuläres. Von befriedigender Allgemeinheit in geometrischer Beziehung scheint mir vielmehr nur folgende Definition zu sein: Es sei

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

die Gleichung der ebenen Kurvenschaar. Betrachten wir α als z Ordinate einer Oberfläche, so sind die Individuen der Schaar die Projectionen der Niveaukurven der Oberfläche. Umhüllungslinien der Kurvenschaar $f(x, y, \alpha) = 0$ werde ich nun nennen die Spuren auf der xy Ebene von darauf senkrechten Cylinderflächen, die die Oberfläche $f(x, y, \alpha) = 0$ tangiren. Fasst man sie so auf, so sieht man, dass sie im Allgemeinen auf der xy Ebene die reellen Werthe von α von den complexen trennen. Es giebt dann unter ihnen auch Kurven, welche diese Trennung vollziehen, ohne Auflösungen der Differentialgleichung der Kurvenschaar zu sein, und dergleichen mehr. Ich gedenke bei einer anderen Gelegenheit auf die Eigenschaften der ebenen Enveloppen näher einzugehen.

Jetzt werde ich nur diejenige Gattung erörtern, welche man erhalten würde auf einer Ebene, die durch die Conoide $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ ginge. Ihre Schnittlinien mit jener Ebene werden eingehüllt von einer Kurve, welche die Schnittlinien schneidet und in der sich die Schnittlinien berühren.

Es seien $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... in sehr geringer Entfernung aufeinanderfolgende Punkte einer als Evolute gedachten Kurve, die in der Richtung $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ... abgewickelt wird. Die Entfernung des Punktes $\mathfrak{P}$ von der Evolvente sei r, und es sei noch $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1} = dr$, $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = dr_1$, etc. Ferner sollen mit $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, ... die Punkte der Evolvente bezeichnet werden, deren Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... sind. Dann berührt der Kreis um $\mathfrak{P}_1$, dessen Halbmesser $r + dr$ ist, den Kreis um $\mathfrak{P}$, dessen Halbmesser r, im Punkt $\mathfrak{P}'$, und der Kreis $(r, \mathfrak{P})$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $(r + dr, \mathfrak{P}_1)$. Der Kreis $(r + dr + dr_1, \mathfrak{P}_2)$ berührt den Kreis $(r + dr, \mathfrak{P}_1)$ im Punkt $\mathfrak{P}_1'$, und der letztere liegt vollständig im ersteren, u. s. f. Die

Evolvente $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$ ... schneidet die sich successiv tangirenden Kreise, und dies ist genau der von uns betrachtete Fall.

Es entsteht nun hier die Frage, ob die Schnittlinien der Conoide die Schnittlinien der umhüllenden Integraloberfläche ebenso osculiren, wie die Krümmungskreise die Evolvente. Dies muss bejaht werden. Nehmen wir an, die durch die Conoide gelegte Schnittfläche sei der xy Ebene parallel; es sei

$$y = \varphi(x)$$

die Gleichung der Spur eines Conoids auf der Schnittebene;

$$\eta = f(x)$$

diejenige der Spur der Umhüllungsoberfläche; endlich sei x_1 die Abscisse des Berührungspunktes beider: so ist für irgend einen diesem sehr nahe gelegenen Punkt $x_1 + \delta$:

$$y - \eta = \frac{\delta^2}{1.2} [f''(x_1) - \varphi''(x_1)] + \text{etc.},$$

da die Conoidspuren auch die Tangenten mit der Enveloppe in ihren Berührungspunkten gemein haben. Nun geht aber die Enveloppe durch die Conoidspur hindurch, so dass die Differenz $y - \eta$ mit δ ihr Zeichen wechselt. Mithin muss auch $f''(x_1) = \varphi''(x_1)$ sein. Wir gewinnen so den Satz, dass jede Integraloberfläche längs ihrer Charakteristiken osculirt wird von denjenigen Conoiden, deren Spitzen auf ihrer Rückkehrkante liegen.

§. 53.

Die Gleichungen der osculatorischen Umhüllungslinien.

Es sei

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

die Gleichung der Kurvenschaar. Zwei Individuen mit den Parametern α und $\alpha + d\alpha$ berühren sich im Punkt x, y. Mithin ist für diesen Punkt:

$$\frac{df}{d\alpha} = 0$$

und durch Elimination von α aus $f = 0$ und $\frac{df}{d\alpha} = 0$ erhält man die Gleichung des Orts der Berührungspunkte, oder die Gleichung der Enveloppe, wie dies bekannt ist.

Es kommt in unserem Falle aber noch eine Gleichung hinzu. Da sich nämlich die Individuen α und $\alpha + d\alpha$ im Punkt xy nicht schneiden, sondern tangiren, so ist auch

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

von α unabhängig und man findet:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right) = 0 \text{ oder } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Hieraus kann man weiter schliessen: Die Gleichung:

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

giebt längs der Enveloppe differenzirt:

$$y'' = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right),$$

D. h. es folgt, dass y'' denselben Werth für die Enveloppe und die sie tangirenden Individuen der Schaar $f = 0$ besitzt. Dies ist bereits §. 52 auf andere Weise bewiesen.

Ferner giebt die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, längs der Enveloppe differenzirt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \alpha} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} d\alpha = 0.$$

Die zwei ersten Terme verschwinden für sich, also folgt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Bemerkung. Die vier Gleichungen:

$$f = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

enthalten die drei Variabeln x, y, α. Sollen diese veränderlich sein, so müssen jene Gleichungen die Form haben:

$$\psi\,(u, v) = 0,$$

wo u und v zwei Funktionen von x, y, α bezeichnen und ψ mit u und v gleichzeitig verschwindet. Die übrigen Variabeln können sonst noch in die Funktionen ψ eingehen. Denkt man sich z. B. x und y als Funktionen von α aus $u = 0$, $v = 0$ bestimmt, so dass $u_1 \equiv x - \varphi(\alpha) = 0$, $v_1 \equiv y - \varphi_1(\alpha) = 0$ und man substituirt in jene vier Gleichungen für x und y die Werthe $u_1 + \varphi$, $v_1 + \varphi_1$, so müssen sie die Form:

$$0 = \Theta \equiv u_1 \psi_1 + v_1 \psi_2$$

annehmen und die vier Θ müssen für $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ gleichzeitig verschwinden. Differenzirt man eine der Gleichungen Θ total, so kommt:

$$d\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

Diese Gleichung wird für $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ erfüllt, weil man dann $du_1 = 0$, $dv_1 = 0$ hat, und $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}$ muss ebensowohl wie Θ für $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ verschwinden. Bei der gegenwärtigen Art Enveloppen lässt man nun aber $d\Theta$ noch auf andere Weise verschwinden. Man hat: $du_1 = dx - \varphi' d\alpha$, $dv_1 = dy - \varphi' d\alpha$, und daher:

$$d\Theta \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} dx + \frac{\partial \Theta}{\partial v_1} dy + d\alpha \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \varphi' - \frac{\partial \Theta}{\partial v_1} \varphi_1' \right\} = 0.$$

Für $\Theta \equiv f$ oder $\Theta = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ verschwindet die Klammer, weil die übrigen Terme verschwinden.

Beispiel zur obigen Bemerkung. Wir wollen als Beispiel die Kreisenveloppen betrachten, welche die Evolventen der Bahn des Kreismittelpunkts sind. Die Gleichung des Kreises sei:

$$f \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0 \qquad 1)$$

und es sei $\beta = \lambda(\alpha)$, $r = \lambda_1(\alpha)$. Es ist dann:

$$-\tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv x - \alpha + (y-\beta)\beta' + rr' = 0. \qquad 2)$$

Ausserdem hat man:

$$-\tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \equiv y - \beta - \beta'(x-\alpha) = 0. \qquad 3)$$

Hieraus folgt zunächst:

$$r'^2 = 1 + \beta'^2,$$
$$x - \alpha + \frac{r}{r'} = u_1,$$
$$y - \beta + \frac{r\beta'}{r'} = v_1.$$

Diese Werthe berücksichtigt, gehen die Gleichungen 1) 2) 3) über in die folgenden:

$$\frac{u_1^2 + v_1^2}{2} - u_1 \frac{r}{r'} - v_1 \frac{r\beta'}{r'} = 0, \qquad 1')$$
$$u_1 + \beta' v_1 = 0, \qquad 2')$$
$$\beta' u_1 - v_1 = 0. \qquad 3')$$

Die zweite giebt differenzirt:

$$du_1 + \beta' dv_1 + v_1 d\beta' = 0.$$

Ordnen wir sie aber nach den Differenzialien dx, dy, $d\alpha$, so wird sie:

$$dx + \beta' dy + d\alpha \{\beta'' (y-\beta) + rr''\} = 0.$$

Aber wegen $(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0$ und der Gleichung 3) verschwindet der Term $dx + \beta' dy$ und man erhält:

$$\beta'' (y-\beta) + rr'' = 0.$$

Hierein $-\frac{r\beta'}{r'}$ für $y-\beta$ gesetzt, folgt:

$$-\beta'\beta'' + r'r'' = 0,$$

was sich auch durch Differentiation von $r'^2 = 1 + \beta'^2$ ergiebt.

§. 54.

Verallgemeinerung des Vorigen.

Gehen die Individuen einer Kurvenschaar successiv mit einander einen Contact von der $n$ten Ordnung ein, so ist ihre osculatorische Enveloppe von der $n$ten Ordnung, womit gemeint ist, dass sie mit den Individuen der Kurvenschaar einen Contact von der $(n+1)$sten Ordnung hat. Es sei nämlich wieder:

$$f\,(x, y, \alpha) = 0$$

die Gleichung der Kurvenschaar. Haben ihre Individuen einen Contact $n$ter Ordnung, so ist:

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{dy'}{d\alpha} = \frac{dy''}{d\alpha} = \text{etc.} = \frac{dy^{(n)}}{d\alpha} = 0.$$

Die Differentiale längs der Enveloppe mögen mit d_1 diejenigen längs der umhüllten Kurven mit d bezeichnet werden. Dann ist:

$$d_1 y = y' d_1 x \text{ wegen } \frac{dy}{d\alpha}\; d_1\alpha = 0,$$

$$d_1 y' = y'' d_1 x \text{ wegen } \frac{dy'}{d\alpha}\; d_1\alpha = 0,$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

$$d_1 y^{(n)} = y^{(n+1)} d_1 x \text{ wegen } \frac{dy^{(n)}}{d\alpha} d_1\alpha = 0$$

oder, weil $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ ist, folgt:

$$\frac{d_1^{\,n+1} y}{d_1 x^{n+1}} = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}},$$

woraus die Richtigkeit des Gesagten hervorgeht*).

*) Diese Bemerkung, dass die Enveloppe von Kurven, die mit einan-

§. 55.

Digression über die Rolle, welche die osculatorische Umhüllungsfläche in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung spielt.

Bekanntlich liegt der Theorie der Gleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

der Satz zu Grunde, »dass die Umhüllungsfläche einer Schaar Integraloberflächen wieder eine Integraloberfläche ist« (§. 5). Dieser Satz stellt geometrisch einen Zusammenhang zwischen den particulären Integralen mit zwei Constanten und deren allgemeinem Integral mit einer willkürlichen Funktion her.

Es fragt sich nun, ob bei den Integraloberflächen der Gleichung

$$F^{II} \equiv F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

ein ähnlicher geometrischer Zusammenhang wie der in jenem Satz ausgesprochene zwischen Umhüllungsflächen und umhüllten Flächen existirt. Ich glaube, der dem obigen analoge Satz für die Gleichung $F^{II} = 0$ ist folgender:

D i e o s c u l a t o r i s c h e U m h ü l l u n g s f l ä c h e e i n e r S c h a a r I n t e g r a l o b e r f l ä c h e n d e r G l e i c h u n g $F^{II} = 0$ i s t w i e d e r e i n e I n t e g r a l o b e r f l ä c h e.

Wir wissen aus dem §. 23, dass auf jeder Integraloberfläche der Gleichung $F^{II} = 0$ *) eine Doppelschaar von Kurven existirt von der Beschaffenheit, dass längs einer jeden von ihnen die ursprüngliche Integraloberfläche von einer anderen unendlich nahen berührt wird. Diese Kurven sind die Contactcharakteristiken. Wir construiren eine Integraloberfläche f, und eine zweite f_1 mag die erste längs der Contactcharakteristik C berühren. Wir construiren eine dritte Integraloberfläche f_2, welche f_1 längs der Charakteristik C_1 berührt, u. s. f. Die durch die Charakteristiken:

---

der einen Contact von der $n$ten Ordnung haben, mit jenen Kurven eine Berührung von der $n+1$sten Ordnung eingeht, ist gerade für diese Theorie von Wichtigkeit. Sie findet sich nicht ausdrücklich ausgesprochen in der sonst sehr vollständigen Darstellung der singulären Auflösungen im geometrischen Theil der *Théorie des fonctions*. Folgt man indessen den Ausführungen der No. 124—128 des citirten Werkes mit Aufmerksamkeit, so sieht man, dass sie sich auch daraus ohne Mühe herleiten lässt.

*) Vorausgesetzt, dass $S^2 - 4RT$ positiv ist.

$$C, C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots$$

gelegte Oberfläche ist alsdann eine Integraloberfläche, denn sie wird in jedem ihrer Punkte von einer Integraloberfläche osculirt, d. h. sie hat mit ihr ausser x, y, z die Grössen p, q, r, s, t gemein, und ihre Gleichung erfüllt demnach in jedem Punkte die Gleichung $F^{II} = 0$.

Es ist aber vorläufig nicht abzusehen, wie man mit Hülfe dieses Satzes mit den partikulären Integralen der Gleichung $F^{II} = 0$ eine ähnliche Operation wie mit denen der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ vornehmen könnte, und zwar ist es deshalb nicht abzusehen, weil man die willkürlichen Elemente des Integrals auf ganz bestimmte Weise variiren muss, damit die Durchschnittslinie der gegebenen und der variirten Integraloberfläche eine Contactcharakteristik sei. Sobald man inzwischen weiss, wie man zu dem Zwecke die Variation einzurichten hat, wird sich ein allgemeineres Integral aus dem partikulären mit Hülfe jenes Satzes ergeben.

Die Untersuchung hierüber ist noch nicht geschlossen, und ich meine, dass sie zu sehr erspriesslichen Resultaten führen könne. Unter andern scheint mir das Integral mit fünf Constanten auf diesem Wege zu einem allgemeinen zu führen. Es ist dies ein Punkt, auf welchen ich an einem anderen Orte zurückkommen werde.

§. 56.

Schluss der Digression. Bemerkung über die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit drei Variabeln.

Der dem Vorigen analoge allgemeine Satz für die partiellen Differentialgleichungen aller Ordnungen ist, wie mir scheint, folgender:

Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung der $n$ten Ordnung sind diejenigen, zwei unendlich nahen Integraloberflächen gemeinsamen Kurven, in denen die beiden Oberflächen einen Contact der $(n+1)$sten Ordnung eingehen. Die Umhüllungsfläche einer Schaar von Integraloberflächen, die successive einen solchen Con-

tact von der $(n-1)$ten Ordnung haben, ist wieder eine Integraloberfläche der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Man kann sie eine osculatorische Umhüllungsfläche von der $n-1$ten Ordnung nennen. Eine Integraloberfläche solcher Differentialgleichung ist vollständig bestimmt durch die Bedingung, dass sie in einer gegebenen Kurve mit einer gegebenen Oberfläche einen Contact von der $(n-1)$ten Ordnung eingehen muss.

Was übrigens die Grenzbedingungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrifft, so kann man offenbar an Stelle der Bedingung, die Integraloberfläche müsse in einer gegebenen Kurve eine gegebene Oberfläche berühren, verlangen, sie müsse durch zwei gegebene Kurven gehen. Und es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Bedingung der anderen äquivalent ist, sie solle ohne Stetigkeitsunterbrechung durch eine gegebene geschlossene Kurve gehen. Denn es wird dann von jeder Charakteristik verlangt, dass sie die Kurve zweimal schneide, was natürlich dasselbe ist, als wenn sie zwei gegebene Kurven schneiden soll.

§. 57.

Fortsetzung der Generation der Rückkehrkanten.

Die Umhüllungsfläche der Conoide $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... ist eine Integraloberfläche, welche durch die Grenzcharakteristik $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ... geht, und es ist nun leicht einzusehen, dass diese eine Rückkehrkante bildet. Der wesentliche Vortheil, den die Anwendung der Conoide bei der Construction der Integraloberflächen darbietet, ist, dass sie in unmittelbarer Nähe der Spitze mit den Polarkegeln verwechselt werden dürfen. Die Spitze des Conoids steckt in der That im Polarkegel, allseitig von ihm berührt, wie in einem Etui. Statt die Enveloppe der Conoide in der Nähe der Grenzcharakteristik zu untersuchen, könnten wir daher die Enveloppe der Polarkegel betrachten, die für die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... als Spitzen construirt sind, da diese Enveloppe die Integraloberfläche längs der Grenzcharakteristik berühren muss. Die Untersuchung wird indessen noch mehr vereinfacht, wenn man von den Conoiden zu-

rückgeht zu den Integralstreifen, aus denen sie zusammengesetzt sind.

Die beiden Integralcharakteristiken C und C_1, die sich im Punkt $\mathfrak{P}$ schneiden, werden in diesem Punkt von zwei Strahlen s und s_1 des Polarkegels $\mathfrak{P}$ berührt, mithin wird der Integralstreifen

$$(c, \mathfrak{P}, c_1)$$

im Punkt $\mathfrak{P}$ vom »Kegelstreifen«

$$(s, \mathfrak{P}, s_1)$$

berührt. Wir können demnach an Stelle der Integralstreifen die Kegelstreifen betrachten, wenn es sich um die unmittelbare Nähe der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, ... handelt. Nennen wir C die Integralcharakteristik, die durch die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ der Grenzcharakteristik geht, C_1 diejenige, welche durch die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ geht, u. s. f., so besteht die Integraloberfläche, welche die Conoide $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... umhüllt, aus den Integralstreifen:

$$(c, \mathfrak{P}, c_1), \ (c_1, \mathfrak{P}_1, c_2), \ (c_2, \mathfrak{P}_2, c_3), \text{ etc.}$$

und wird längs der Grenzcharakteristik berührt von einer Oberfläche, die aus den Kegelstreifen:

$$(s, \mathfrak{P}, s_1), \ (s_1, \mathfrak{P}_1, s_2), \ (s_2, \mathfrak{P}_2, s_3), \text{ etc.}$$

besteht. Die letztere Oberfläche ist offenbar die Abwickelbare, welche die bewegliche Tangente an die Grenzcharakteristik beschreibt. In dieser »Grenzabwickelbaren« steckt die Integraloberfläche längs der Rückkehrkante wie in einem Etui. Sie spielt also für die dritte Gattung Integraloberflächen dieselbe Rolle, wie der Polarkegel für die Conoide.

Diese Eigenschaften der Integraloberflächen, längs ihrer Rückkehrkanten von derjenigen Abwickelbaren berührt zu werden, die der Ort der Tangenten an die Rückkehrkante ist, diese Eigenschaft ist eine ziemlich allgemeine. Wenn sich nämlich auf einer Oberfläche ein solches System von Kurven ziehen lässt, dessen Individuen durch die Rückkehrkante hindurchgehen, ohne darin einen Knick zu erfahren, so ist die Rückkehrkante die Enveloppe dieser Kurven und die Tangenten an die Rückkehrkante müssen auch Tangenten an die Oberfläche sein. Umgekehrt, wenn eine Oberfläche längs ihrer Rückkehrkante von den Tangenten an die Rückkehrkante be-

rührt wird, so lässt sich in allen Punkten der letzteren ein solcher Schnitt durch die Oberfläche führen, dass die Schnittkurve in der Rückkehrkante keinen Rückkehrpunkt hat.

§. 58.

Bemerkung über die Rückkehrkanten der Integrale mit zwei Constanten.

Was die Rückkehrkanten der Integrale mit zwei Constanten betrifft, so muss hier die Betrachtung des §. 40 vervollständigt werden. Es sei $f \equiv f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ das Integral mit zwei Constanten. Die Charakteristiken der Oberfläche $f = 0$ sind deren Durchschnittslinien mit einer Oberflächenschaar, welche durch Variation des Parameters γ in der Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$$

erhalten wird. Hat diese Schaar eine Umhüllungsfläche, die von der Oberfläche $f = 0$ geschnitten wird, so müssen sich in dieser Schnittlinie die Charakteristiken der Gleichung $f = 0$ schneiden, mithin ist diese Schnittlinie der Oberfläche $f = 0$ und der Umhüllungsfläche der Schaar $\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$ die Rückkehrkante der Oberfläche $f = 0$. Setzt man nun:

$$c = f(x, y, z, \alpha, \beta)$$

als Gleichung einer Oberflächenschaar, die durch Variation des Parameters c ansteht, so folgt aus dem Obigen, dass die Umhüllungsfläche der Oberflächenschaar:

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}},$$

welche durch Variation von γ entsteht, der Ort der Rückkehrkanten der Schaar $c = f$ ist.

§. 59.

Ueber die Aufgabe des folgenden Abschnittes.

Indem ich hiermit diese allgemeinen Betrachtungen über die Integraloberflächen beschliesse, bemerke ich, dass sich

diese ganze Theorie mit grosser Leichtigkeit ergeben hat, sobald wir einmal die Existenz der Integralcharakteristiken und deren Eigenschaften erkannt hatten. Dies geschah indessen analytisch, und die bisherigen Untersuchungen haben zwar gelehrt, wie sich der Unterschied zwischen den Integral- und Grenzcharakteristiken offenbart, jedoch nicht, worin er besteht. Wie unentbehrlich aber für die Interpretation der Gleichung $F=0$ die Ausfüllung dieser Lücke sei, zeigt folgendes Raisonnement.

Man denke sich irgend eine Integralkurve der Gleichung $\Phi=0$ durch den Raum gelegt. Wir construiren zu allen ihren Punkten die Polarkegel und legen Tangentialebenen an alle Polarkegel durch die Strahlen, in welchen sie von der gegebenen Kurve berührt werden. Diese werden von einer Abwickelbaren eingehüllt. Zu irgend einem Punkte $\mathfrak{P}'$, in der Nähe der Ausgangskurve, construiren wir den Polarkegel, der die Abwickelbare im Allgemeinen in zwei Strahlen schneiden wird. Wir wählen von diesen Strahlen einen, und construiren zu einem dem Punkte $\mathfrak{P}'$ nahe gelegenen Punkt $\mathfrak{P}_1'$ wieder den Polarkegel, der die Abwickelbare wieder in zwei Strahlen schneidet, von denen man dann einen zu wählen hat, etc., um die Kurve $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2'$, ... auf der Abwickelbaren fortzusetzen. Diese Kurve ist wieder eine Integralkurve der Gleichung $\Phi=0$, und wir denken uns für sie eine Abwickelbare wie für die erste construirt, auf dieser zweiten Abwickelbaren eine dritte Kurve gezeichnet, u. s. f. Alle so entstandenen Abwickelbaren werden von einer Integraloberfläche eingehüllt, da längs der oben construirten Kurven der Polarkegel beim Uebergang zur Grenze, die Abwickelbaren tangiren muss. Auf diese Weise haben wir eine Integraloberfläche construirt, deren Charakteristiken keine Integralcharakteristiken sind. Aus dem Früheren wissen wir aber, dass diese Construction falsch oder wenigstens ungenügend sein muss, und es wird nun darauf ankommen, den Fehler aufzudecken. Zu diesem Zweck werden wir im Folgenden die Integraloberflächen auf Grund der Differentialgleichung $F=0$ aus ebenen Facetten zusammensetzen, wobei sich über diesen Punkt Licht verbreiten wird.

Vierter Abschnitt.

Ueber die Construction der Integraloberflächen aus Flächenelementen.

XII. Ueber gewisse Kurvensysteme auf Oberflächen.

§. 60.

Die Diagonalschaaren zweier Kurvenschaaren.

Denkt man sich irgend zwei Kurvenschaaren auf einer Oberfläche, so haben diese zwei Diagonalschaaren, zu denen sie ihrerseits die Diagonalschaaren sind. Verschaffen wir uns eine Vorstellung von der Entstehung solcher Diagonalschaaren. Der Einfachheit wegen soll angenommen werden, die beiden Kurvenschaaren befinden sich auf der xy Ebene. Die Punkte, in denen die eine Schaar die x Axe schneidet, sollen mit ξ, die analogen bei der anderen Schaar mit ξ_1 bezeichnet werden und die Gleichungen beider Kurvenschaaren seien:

$$\varphi \equiv \varphi\,(x,\,y) - \varphi\,(\xi,\ 0) = 0,$$
$$\varphi_1 \equiv \varphi_1(x,\,y) - \varphi_1(\xi_1,\,0) = 0.$$

Legen wir durch ein Viereck, welches von zwei beiden Schaaren angehörigen Kurvenpaaren gebildet wird, die Diagonale, so sehen wir, dass die Richtung dieser Diagonale von den Abständen der zu jedem Paar gehörigen Kurven abhängt. Wir legen nun transversal durch die eine Schaar $\varphi = 0$ irgend eine Kurve K, und geben den Individuen der Schaar $\varphi=0$ beliebige Abstände von einander. Soll die Kurve K eine Diagonalkurve sein, so müssen die Individuen der Schaar $\varphi_1=0$ durch die Schnittpunkte der Kurve K mit der Schaar $\varphi=0$ gehen.

Dann verbinden die Elemente der Kurve K immer die gegenüberliegenden Ecken der durch die beiden Kurvensysteme gebildeten Vierecke. Ausser der Diagonalkurve K lässt sich dann eine ganze Schaar von Diagonalkurven construiren, welche durch die homologen Ecken der übrigen Vierecke gehen, und ausserdem die zweite Diagonalkurvenschaar, welche die erste kreuzt. Beide Schaaren sind mithin vollkommen bestimmt durch die Abstände der Kurven $\varphi=0$ und die gegebene Kurve K oder noch der Abstände der Kurven $\varphi_1=0$. Eine einfache, hier nicht weiter anzustellende Ueberlegung ergiebt noch, dass nicht etwa statt der Abstände der Kurven $\varphi=0$ eine Kurve des zweiten Diagonalsystems willkürlich ist.

Ich gehe an diesem Orte nicht ein auf das allgemeine Problem, die Gleichungen der Diagonalkurvenschaaren aus denen der gegebenen Schaaren zu finden.

Zum Zwecke der Anwendungen der Diagonalkurven soll eine bequeme Bezeichnungsweise der auf solche Kurvensysteme bezüglichen Grössen angegeben werden. Man kann sich vorstellen, die Oberfläche, auf welcher die Kurvenschaaren gezeichnet sind, sei die feste Grundlage der Vorstellungen, und die Werthe der Coordinaten x, y, z für alle ihre Punkte seien auf der Oberfläche vertheilte Dichtigkeiten ähnlicher Art, wie man die elektrischen Dichtigkeiten definirt. Wir werden nun die Differentiale dieser Dichtigkeiten nach ihrer Richtung bezeichnen, und ganz naturgemäss den Index, der die Richtung unterscheidet, dem d und nicht der Substanz geben. Demnach werden Differentiale längs der einen Kurvenschaar mit d, längs der anderen mit d_1, längs der Diagonalkurven mit d_2 zu bezeichnen sein, und man wird haben:

$$dx + d_1x = d_2x,$$
$$dy + d_1y = d_2y,$$
$$dz + d_1z = d_2z,$$
$$d\varrho + d_1\varrho = d_2\varrho,$$

wo ϱ die Dichtigkeit irgend einer anderen auf der Oberfläche noch etwa vertheilten Substanz vorstellt. Die vorstehenden Gleichungen sollen Differentialgleichungen der Diagonalkurven heissen, und durch das Symbol $d + d_1 = d_2$ bezeichnet werden.

Anwendungen. Zwei Kurvenschaaren auf einer Oberfläche sind durch ihre Differentialgleichungen:

$$dx = udz \qquad d_1x = u_1d_1z,$$
$$dy = vdz \qquad d_1y = v_1d_1z$$

gegeben. Die Gleichung der Oberfläche soll gefunden werden: Eliminirt man aus den vorliegenden Gleichungen und den folgenden

$$dz = pdx + qdy$$
$$d_1z = pd_1x + qd_1y$$

die Differentiale, nachdem man $dz = d_1z$ gesetzt hat, so erhält man die Werthe von p und q in x, y, z, vorausgesetzt, dass u, v, u_1, v_1 nur von x, y, z, p, q abhängen. Dann findet man aber die Gleichung der Oberfläche vermöge der Auflösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Man kann direkt zu dieser Gleichung gelangen, wenn man aus den vorstehenden 6 Gleichungen und den Gleichungen der Diagonalkurven p und q und alle Differentiale mit Ausnahme von d_2x, d_2y, d_2z eliminirt. Eine Projection einer Diagonalkurve kann man willkürlich annehmen, und wählt man sie so, dass die Diagonalkurve, wenn man einen Parameter der willkürlich angenommenen Projection variirt, stets durch denselben Punkt geht, so hat man ebenfalls nur eine gewöhnliche Differentialgleichung zu integriren, und die Elimination jenes Parameters aus der Gleichung der willkürlichen Projection und dem Integral der Differentialgleichung liefert die gesuchte Gleichung der Oberfläche. Dies Verfahren kommt im Wesentlichen auf die Methode des §. 1 hinaus.

Die Differentialgleichungen der Kurvenschaaren mögen zweitens in folgender Form gegeben sein:

$$dx = udz \qquad d_1x = vd_1z,$$
$$dy = u_1dz \qquad d_1y = v_1d_1z,$$
$$d\varrho = u_2dz \qquad d_1\varrho = v_2d_1z,$$

wo ϱ irgend eine Dichtigkeit auf der zu bestimmenden Oberfläche bedeutet, und die u, u_1, u_2; v, v_1, v_2 nur von x, y, z, ϱ abhängen. Eliminirt man aus vorstehenden Gleichungen und den Gleichungen der Diagonalkurven $d + d_1 = d_2$ die Differentiale mit den Zeichen d und d_1, so erhält man zwei Gleichungen:

$$d_2z = z_1d_2x + z_2d_2y,$$
$$d_2\varrho = \varrho_1d_2x + \varrho_2d_2y,$$

wo

$$z_1 = \frac{v_1 - u_1}{(uv_1)},\ z_2 = -\frac{v-u}{(uv_1)};\quad \varrho_1 = \frac{(u_2v_1)}{(uv_1)},\ \varrho_2 = -\frac{(u_2v)}{(uv_1)}$$

ist. Wir erkennen zunächst, welches das Criterium dafür sei, dass die beiden obigen Systeme von Differentialgleichungen eine gemeinschaftliche Lösung der in Rede stehenden Art haben: es müssen wegen der Willkürlichkeit der Richtung der Diagonalkurven, mithin eines der Differentiale mit dem Zeichen d_2, identisch erfüllt werden die Gleichungen:

$$p_1 = z, \; q = z_2, \; \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho_1, \; \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} = \varrho_2,$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_2}{\partial x}, \; \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}.$$

Dies giebt die zwei Bedingungen:

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial z} z_2 + \frac{\partial z_1}{\partial \varrho} \varrho_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial z_2}{\partial z} z_1 + \frac{\partial z_2}{\partial \varrho} \varrho_1,$$
$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} z_2 + \frac{\partial \varrho_1}{\partial \varrho} \varrho_2 = \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} z_1 + \frac{\partial \varrho_2}{\partial \varrho} \varrho_1,$$

denen die u und v genügen müssen. Ausserdem sehen wir, dass die Auffindung des gemeinschaftlichen Integrals von der Auflösung zweier Differentialgleichungen abhängt. Denn wir können über eine Projection der Diagonalkurven verfügen. Daher ist hier die Methode des §. 1 in vollem Umfang anwendbar.

Hätten die Differentialgleichungen die Form:

$$\begin{aligned} pdx + qdy &= dz & \quad pd_1x + qd_1y &= d_1z, \\ dy &= udz & d_1y &= vd_1z, \\ dp &= u_1dz & d_1p &= v_1d_1z, \end{aligned}$$

wo man sich q und auch u, u_1; v, v_1 in x, y, z, p gegeben denken mag, so würden die Gleichungen mit dem Zeichen d_2:

$$d_2z = pd_2x + qd_2y,$$
$$(u-v)\, d_2p = (uv_1)\{pd_2x + qd_2y\} + (u_1 - v_1)\, d_2y.$$

Daraus geht hervor, dass bei der Integration der Gleichung $F = 0$ die Ordnung der aufzulösenden Differentialgleichungen um eine Einheit würde erniedrigt werden, wenn, natürlich nur für gewisse Klassen von Integraloberflächen, ausser den Gleichungen der Charakteristiken noch diejenigen irgend eines anderen auf der Integraloberfläche befindlichen Kurvensystems bekannt wären.

Es bietet so wenig Schwierigkeiten, die in diesem §. gemachten Bemerkungen auf eine grössere Anzahl von Variabelen auszudehnen, dass ich mich nicht dabei aufhalten werde. Ich gehe vielmehr dazu über, ein neues, bei der Construction der

Integraloberflächen der Gleichung $F = 0$ anzuwendendes Kurvensystem zu beschreiben.

§. 61.

Die Facettelinien.

Bei der Construction von Kurven aus ihren Differentialgleichungen beginnt man mit der Construction eines Linienelements, an welches sich in stetiger Folge andere anreihen, die dann eine polygonale Kurve bilden, welche beim Uebergang zur Grenze in eine continuirliche Kurve übergeht. Ein analoges Verfahren bei der Construction von Oberflächen zu ermöglichen, ist die Aufgabe, die ich mir nun stelle. Es kommt offenbar alles darauf an, die Oberfläche zunächst in geeigneter Weise aus ebenen sehr kleinen Facetten zusammenzusetzen, m. a. W. eine »polyedrische« Oberfläche zu bilden. Die Wahl dreieckiger Facetten ist deshalb nicht rathsam, weil man drei Kurvensysteme auf der Oberfläche braucht, um sie in Dreiecke zu zerlegen. Wir werden daher, was immer möglich ist, die Oberfläche aus viereckigen Facetten zusammensetzen.

Man denke sich irgend eine Kurvenschaar auf der Oberfläche gezeichnet. Es soll durch diese Schaar eine Transversalschaar gelegt werden von der Beschaffenheit, dass die vier Eckpunkte jedes von zwei Paaren von Individuen beider Schaaren gebildeten Vierecks in einer Ebene liegen, vorausgesetzt, dass die Individuen, aus welchen ein solches Paar besteht, einander äusserst nahe verlaufen. Da zwischen den gegenüberliegenden Seiten jenes Vierecks ein Parallelismus erster Ordnung herrschen muss, und die Schnittlinie der durch die vier Ecken gelegten Ebene mit der Oberfläche die indikatorische Linie Dupin's ist, mithin eine Kurve zweiten Grades, so ist das Viereck das eingeschriebene Parallelogramm eines Kegelschnitts und die Richtungen der Seiten sind die von conjugirten Halbmessern. Man braucht also nur zu jedem Kurvenelement der einen Schaar die Richtung des conjugirten Durchmessers des Dupin'schen Schnitts aufzusuchen, um die zweite Schaar zu erhalten. Ich werde jetzt die Gleichung, welche beide Schaaren verbindet, jedoch auf eine andere Weise wie eben angedeutet, herleiten.

Sollen vier Punkte x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 in einer Ebene liegen, so müssen sie die Gleichungen:

$$ax + by + cz = d,$$
$$ax_1 + by_1 + cz_1 = d,$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 = d,$$
$$ax_3 + by_3 + cz_3 = d$$

erfüllen. Setzt man:

$$x_1 - x = dx, \text{ etc.},$$
$$x_2 - x = d_1x, \text{ etc.},$$
$$x_3 - x = d_2x, \text{ etc.},$$

und eliminirt aus jenen Gleichungen die Coefficienten a, b, c, d, so folgt:

$$0 = dz\,(d_1x d_2y) - d_1z\,(dx d_2y) + d_2z\,(dx d_1y)$$

als Bedingung dafür, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen. Wir wollen annehmen, der Punkt x_3, y_3, z_3 liege dem Punkt x, y, z gegenüber. Die Gleichung der Oberfläche $z = f\,(x, y)$ giebt:

$$dz = pdx + qdy + \tfrac{1}{2}\{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2\} \equiv d^Iz + d^{II}z,$$
$$d_1z = pd_1x + qd_1y + \tfrac{1}{2}\{rd_1x^2 + 2sd_1xd_1y + td_1y^2\} \equiv d_1^Iz + d_1^{II}z,$$
$$d_2z = pd_2x + qd_2y + \tfrac{1}{2}\{rd_2x^2 + 2sd_2xd_2y + td_2y^2\} \equiv d_2^Iz + d_2^{II}z,$$

wo die römischen Ziffern die Glieder erster und zweiter Ordnung unterscheiden. Führt man diese Werthe von dz, d_1z, d_2z in die obige Bedingung ein, so verschwinden die in d^Iz, d_1^Iz, d_2^Iz multiplicirten Terme identisch.

Zwischen den gegenüberliegenden Seiten des Kurvenvierecks soll ein Parallelismus erster Ordnung herrschen. Daher ist bis auf Grössen zweiter Ordnung genau:

$$dx + d_1x = d_2x,$$
$$dy + d_1y = d_2y$$

und daraus folgt:

$$(dx d_1y) = (dx d_2y) = -(d_1x d_2y).$$

Mithin heben sich aus der Bedingung die in $d^{II}z, d_1^{II}z, d_2^{II}z$ multiplicirten Determinanten weg, und sie wird:

$$d^{II}z + d_1^{II}z = d_2^{II}z.$$

Diese Gleichung ist bis auf Grössen dritter Ordnung genau, während die Gleichung:

$$d^Iz + d_1^Iz = d_2^Iz$$

bis auf Grössen zweiter Ordnung stimmt. Führt man in die

transformirte Bedingung die expliciten Werthe der Terme $d^{II}z$, $d_1^{II}z$, $d_2^{II}z$ ein, so ergiebt sich:

$$r dx d_1x + s(dx d_1y + d_1x dy) + t dy d_1y = 0,$$

welches die Differentialgleichung der beiden Kurvensysteme ist. Bezeichnet man die Veränderungen von p und q in der Richtung der einen und der anderen Schaar mit dp, dq und d_1p, d_1q; so kann die Differentialgleichung auch geschrieben werden:

$$dx d_1p + dy d_1q = 0,$$

oder:

$$d_1x dp + d_1y dq = 0$$

und setzt man

$$\frac{dx}{dz} = x', \quad \frac{dy}{dz} = y', \quad \frac{d_1x}{d_1z} = x_1', \quad \frac{d_1y}{d_1z} = y_1',$$

so ergeben sich wegen

$$px' + qy' = 1,$$
$$px_1' + qy_1' = 1,$$

die Gleichungen:

$$pd_1x' + qd_1y' = 0,$$
$$pdx_1' + qdy_1' = 0$$

und

$$(d_1x' dy_1') = 0.$$

Da nun irgend zwei durch jene Differentialgleichung verbundene Kurvenschaaren die Oberfläche, auf welcher sie gezeichnet sind, in ebene Kurvenvierecke zerlegen, so kann man sie Facettelinien nennen, und da eine von den beiden Transversalschaaren willkürlich angenommen werden kann, so mag die eine die Facettelinienschaar der anderen heissen.

Monge bedient sich in seiner Abhandlung: *De l'Integration des Equations aux différences partielles* etc.*) eines Systems von Kurven, die er Trajectorien nennt, und folgendermassen entstehen lässt. Ist irgend eine Kurvenschaar auf einer Oberfläche gegeben, und man legt an zwei unendlich nahe Individuen der Schaar eine sie beide berührende Tangentialebene, so ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte ein Element eines Individuums des Trajectoriensystems. Diese individuelle Kurve wird dann fortgesetzt, indem man die Berührungsebene so lange um die zweite Kurve dreht, bis sie die dritte berührt.

*) *Application de l'Analyse à la Géométrie.*

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte auf der zweiten und dritten Kurve ist das zweite Element der Trajectorie, u. s. f. Ich werde nun zeigen, dass diese von MONGE unter dem Namen Trajectorien beschriebenen Kurven identisch sind mit den Facettelinien.

Die Neigungstangenten eines Elements einer Kurve des gegebenen Systems seien a und b und für eine der ersten benachbarte Kurve seien sie a_1, b_1; diejenigen der Normale an die Berührungsebene beider Kurven seien n_1, n_2, und die Projectionen der Verbindungslinie: d_1x, d_1y, d_1z. Dann hat man:

$$n_1a + n_2b + 1 = 0,$$
$$n_1a_1 + n_2b_1 + 1 = 0,$$
$$n_1d_1x + n_2d_1y + d_1z = 0.$$

Durch Elimination von n_1 und n_2 aus diesen Gleichungen folgt:

$$d_1xd_1b - d_1yd_1a - d_1z\ (ad_1b - bd_1a) = 0 \ \ldots\ldots\ d_1b),$$

wo $a_1 - a = d_1a$, $b_1 - b = d_1b$ gesetzt ist.

Ausserdem ist:

$$pa + qb = 1,$$
$$p_1a_1 + q_1b_1 = 1,$$

wo p, q sich auf den Berührungspunkt in der ersten, p_1, q_1 auf den in der zweiten Kurve beziehen. Setzen wir noch:

$$p_1 - p = d_1p,\ q_1 - q = d_1q,$$

so folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$ad_1p + bd_1q + pd_1a + qd_1b = 0.$$

Soll die Verbindungslinie das Element einer Facettelinie sein, so muss:

$$pd_1a + qd_1b$$

verschwinden. In diesen Ausdruck den aus der Gleichung $d_1b)$ gezogenen Werth:

$$d_1b = d_1a\ \frac{d_1y - bd_1z}{d_1x - ad_1z}$$

substituirt, wird er:

$$\frac{d_1a}{d_1x + ad_1z}\left\{ pd_1x + qd_1y - d_1z \right\},$$

und da die Klammer offenbar zweiter Ordnung ist, nähert sich der Term $pd_1a + qd_1b$ schneller der Null als der Term $ad_1p + bd_1q$, so dass der letztere für sich verschwindet. Mithin ist der angekündigte Beweis geführt.

Schliesslich noch folgende Bemerkung über die »Facettirung« der Oberflächen. Nimmt man die Abstände der Kurven

K, K_1, K_2, ... der einen Schaar sehr klein aber endlich an, und legt durch diese Schaar eine Facettelinie, welche die Kurven K, K_1, K_2, ... in den Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... schneiden mag; legt dann eine Ebene durch die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, welche die Kurven K, K_1 in einer endlichen aber kleinen Entfernung von den Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ in den Punkten $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}_1'$ schneidet; ferner eine Ebene durch die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_1'$, welche die Kurven K_1, K_2 in den Punkten $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2'$ schneidet; ferner eine Ebene durch $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_2'$; u. s. f., so entsteht eine neue polygonale Facettelinie: $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, ... die mit einer wirklichen Facettelinie der Schaar K, K_1 ... verschmilzt, wenn man alle endlich gedachten Abstände verschwinden lässt. Man kann nun fortfahren, neue polygonale Facettelinien $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}_1''$, ... etc. zu construiren, die immer mehr von den durch die Differentialgleichung bestimmten abweichen werden. Die stetige Oberfläche wird so angesehen werden können, als die Grenze einer polyedrischen aus endlichen ebenen Vierecken zusammengesetzten Oberfläche.

Man kann aber auch auf andere Weise die Oberfläche aus endlichen Facetten zusammensetzen. Denkt man sich nämlich auf der Oberfläche beide Kurvenschaaren, die gegebene und ihre Facetteschaar, in endlichen aber kleinen Abständen gezeichnet, und legt durch drei Eckpunkte eines von ihnen gebildeten Vierecks eine Ebene, so wird diese nicht durch den vierten Eckpunkt gehen. Legt man nun noch eine Ebene durch den vierten Eckpunkt, welche die erstere in der diesem Punkt gegenüberliegenden Diagonale schneidet, so bilden beide Ebenen, denkt man sie sich durch die Diagonale begrenzt, eine »gebrochene Facette«, d. h. das Kurvenviereck zerfällt in zwei ebene Dreiecke. Jedes von den Facetteschaaren gebildete Viereck kann so durch eine gebrochene Facette ersetzt werden, und so entsteht an Stelle der stetigen Oberfläche eine polyedrische aus Dreiecken zusammengesetzt, indessen in der Weise, dass die Ebenen der zu einer gebrochenen Facette gehörigen Dreiecke einen Winkel höherer Ordnung mit einander bilden, als die zu zwei benachbarten Facetten gehörigen Dreiecke.

Bei der ersteren Construction polyedrischer Oberflächen waren mithin die Facetten als eben angenommen, dagegen summirten sich die Abweichungen der polygonalen von den

stetigen Facettelinien von Facette zu Facette. Bei der letzteren Construction findet eine gleichförmige Vertheilung der Abweichung statt.

§. 62.

Facettelinien der Integralcharakteristiken.

I. Bei den linearen Differentialgleichungen. Die Facettelinien der Charakteristiken der letzteren bilden in jedem Punkte des Raums einen Kegel, den man folgendermassen construiren kann. Die Charakteristiken bilden in diesem Falle eine räumliche Kurvenschaar, die man als Durchschnittslinien von zwei Oberflächenschaaren ansehen kann. Legt man nun an den Punkt 𝔓 einer Charakteristik C eine Berührungsebene, so wird diese irgend eine andere benachbarte Charakteristik C_1 ebenfalls berühren und zwar im Punkt 𝔓. Die Berührungsebene drehen wir nun ein wenig um den Punkt 𝔓 und um die Tangente an die erste Charakteristik C in diesem Punkt. In ihrer neuen Lage wird sie eine dritte Charakteristik C_2 im Punkt $𝔓_2$ berühren. Fährt man nun fort, die Berührungsebene zu drehen, so wird sie immer neue Charakteristiken berühren und der Ort der Verbindungslinien $\overline{𝔓𝔓_1}$, $\overline{𝔓𝔓_2}$, $\overline{𝔓𝔓_3}$, etc. wird eine Kegelfläche sein, die ihre Spitze im Punkt 𝔓 hat, und welche wir den Facettekegel nennen wollen. Ihr Gesetz kann folgendermassen gefunden werden. Differenziren wir die Gleichung:

$$Ap + Bq = 1$$

längs einer Facettelinie der Charakteristiken, so folgt:

$$pd_1A + qd_1B + Ad_1p + Bd_1q = 0,$$

wo

$$d_1A = \frac{\partial A}{\partial x}\,d_1x + \frac{\partial A}{\partial y}\,d_1y + \frac{\partial A}{\partial z}\,d_1z,$$

$$d_1B = \frac{\partial B}{\partial x}\,d_1x + \frac{\partial B}{\partial y}\,d_1y + \frac{\partial B}{\partial z}\,d_1z.$$

Aber wegen

$$d_1pdx + d_1qdy = 0$$

verschwindet $Ad_1p + Bd_1q$, und man hat:

$$pd_1A + qd_1B = 0.$$

p und q kann man mit Hülfe der partiellen Differentialgleichung und der Gleichung $pd_1x + qd_1y = 0$ eliminiren und statt der Differentiale die Neigungstangenten einführen. Man erhält dann endlich als Gleichung des Facettekegels:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}x_1' + \frac{\partial A}{\partial y}y_1' + \frac{\partial A}{\partial z}\right)(B - y_1')$$
$$-\left(\frac{\partial B}{\partial x}x_1' + \frac{\partial B}{\partial y}y_1' + \frac{\partial B}{\partial z}\right)(A - x_1') = 0.$$

Ist daher die Gleichung $F = 0$ lineär, so wird ihr Normalenkegel eine Ebene, der Polarkegel ist das Loth an diese Ebene und der Facettekegel ist zweiten Grades.

II. Wenn die Gleichung $F = 0$ nicht lineär ist. Jedem Strahl des Polarkegels entspricht hier nur ein Facettelinienelement, so dass diese ebenfalls in jedem Punkte einen Kegel bilden, wie sich gleich ergeben wird. Differenziren wir die Gleichung F mit dem Zeichen d_1, so folgt:

$$Xd_1x + Yd_1y + Zd_1z + Pd_1p + Qd_1q = 0,$$

wegen $d_1pdx + d_1qdy = 0$ verschwindet $Pd_1p + Qd_1q$ und man hat:

$$Xd_1x + Yd_1y + Zd_1z = 0.$$

Hier wieder die Neigungstangenten statt der Differentiale eingeführt, liefert die Elimination von p und q aus dieser Gleichung und den Gleichungen $F = 0$, $px_1' + qy_1' = 1$ die Gleichung:

$$\Psi(x, y, z, x_1', y_1') = 0$$

einer Kegelfläche, in der wir die Kegelfläche des §. 43 wiedererkennen werden, und die wir auch dort schon den Facettekegel genannt haben. Der Zusammenhang der Eigenschaften, die wir dort und so eben an ihm entdeckten, wird sich bald aufklären.

Bemerkung. Horizontale Charakteristiken und Facettelinien. Wird die Funktion F so zusammengesetzt angenommen, dass die Grösse $Pp + Qq$ verschwindet, so folgt aus den Gleichungen der Integralcharakteristiken:

$$(Pp + Qq)\,dx = Pdz$$
etc.,

dass $dz = 0$, d. h. die Charakteristik verläuft horizontal (der xy Ebene parallel). Die Differentialgleichung $F = 0$ hat dann die Form $p = \varphi(x, y, z)\,q$, und die Integraloberflächen dieser Gleichung schneiden sich allerdings horizontal. Aus

$$Xd_1x + Yd_1y + Zd_1z = 0, \quad d_1z = pd_1x + qd_1y$$

folgt:

$$(Xq - Yp)\,d_1x + (Y + qZ)\,d_1z = 0,$$
$$(Xq - Yp)\,d_1y - (X + pZ)\,d_1z = 0,$$

daher werden für $Xq - Yp = 0$ die Facettelinien horizontal. Die Form der Gleichung $F = 0$, welche dieser Bedingung entspricht, ist:

$$xp + yq = \varphi(z, p, q),$$

eine Differentialgleichung, deren Integration mit Hülfe der Legendre'schen Substitution oder auch auf andere Weise sich leicht bewerkstelligen lässt.

III. Facettelinien der Integraloberflächen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese Integraloberflächen haben zwei Schaaren von Charakteristiken. Es entsteht die Frage, wann dieselben zu einander Facettelinien sind. Eliminirt man aus der Gleichung der Facettelinien:

$$r dx d_1 x + s(dx d_1 y + d_1 x dy) + t dy d_1 y = 0$$

und den Gleichungen (§. 23):

$$2\,R dy = (S + \sqrt{S^2 - 4RT})\,dx,$$
$$2\,R d_1 y = (S - \sqrt{S^2 - 4RT})\,d_1 x,$$

die Differentiale, so folgt:

$$Rr + Ss + Tt = 0$$

und das Integral dieser Gleichung, gleich Null gesetzt, ist:

$$F\left(x, y, z, p, q, \frac{s}{r}, \frac{t}{r}\right) = 0.$$

Es ergiebt sich also, dass die Contactcharakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dann Facettelinien sind, wenn die Differentialgleichung nur die Verhältnisse der Differentialquotienten enthält.

§. 63.

Zusammenhang der Charakteristiken und Krümmungslinien.

Die Facettelinien gehen, wenn man neben ihrer Differentialgleichung die Bedingung dafür, dass ihre beiden Schaaren orthogonal sind:

$$dx d_1 x + dy d_1 y + dz d_1 z = 0$$

aufstellt, in die Krümmungslinien über.

I. Fragt man daher, wie die Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ beschaffen sein muss, damit die Facettelinien und die Charakteristiken sich rechtwinklig schneiden, so erhält man die

Formen der Gleichung $F=0$, für welche die Charakteristiken der Integraloberflächen gleichzeitig ihre Krümmungslinien sind. Es müssen erfüllt werden folgende Gleichungen:

$$pdx + qdy = dz,$$
$$pd_1x + qd_1y = d_1z,$$
$$dxd_1x + dyd_1y + dzd_1z = 0,$$
$$Pdy - Qdx = 0,$$
$$Xd_1x + Yd_1y + Zd_1z = 0.$$

Aus diesen Gleichungen die Differentiale eliminirt, kommt:

$$X\{Q+q(Pp+Qq)\}-Y\{P+p(Pp+Qq)\}+Z\{pQ-qP\}=0.$$

Dieses ist eine partielle Differentialgleichung, der die Gleichung F genügen muss, wenn sie die angegebene Eigenschaft haben soll.

Die lineäre Form der Gleichung $F=0$ genügt ihr zunächst nicht. Betrachten wir einige nicht lineäre Formen. Gehen x, y, z in F nicht ein, so erfüllt es offenbar jene Gleichung. Dann ist die Gleichung $F(p, q)=0$ auch diejenige der abwickelbaren Oberflächen, deren gerade Erzeugungslinien ihre Krümmungslinien und, wie wir wissen, gleichzeitig ihre Charakteristiken sind. In der allgemeineren Form:

$$\varphi(p, q, z-xp-yp) = 0,$$

genügt ihr die Gleichung der Abwickelbaren ebenfalls. Enthält ferner F nur eine von den Variabeln x, y, z so sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich, wenn F z, oder wenn es x oder y enthält.

Erstens, wenn F x und y nicht enthält, so muss es der Gleichung:

$$pQ-qP=0$$

genügen, d. h. es muss sein:

$$F \equiv p^2+q^2-\varphi(z)=0.$$

Ein Integral mit zwei Constanten dieser Gleichung ist:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

dem man bei der Willkürlichkeit der Funktion φ die Form:

$$z=\chi\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]$$

geben kann.

Im zweiten Falle muss F z. B. der Gleichung:

$$pqP+(1+q)^2Q=0$$

genügen oder es muss sein:

$$F \equiv p^2 - \varphi(x)(1+q^2) = 0.$$

Die letztere Gleichung giebt integrirt:

$$z = \sqrt{\alpha}\int\sqrt{\varphi(x)}\,dx + y\sqrt{\alpha-1} + \beta,$$

wo α und β Integrationsconstanten bedeuten. Setzen wir der Kürze halber:

$$\int\sqrt{\varphi(x)}\,dx = U,$$

so muss demnach die Gleichung:

$$\frac{U}{\sqrt{\alpha}} + \frac{y}{\sqrt{\alpha-1}} + \gamma$$

diejenige der Projection der Krümmungslinien der Oberfläche:

$$z = U\sqrt{\alpha} + y\sqrt{\alpha-1} + \beta$$

sein. Aus dieser Gleichung findet man:

$$p = \sqrt{\alpha}U', \quad q = \sqrt{\alpha-1}, \quad r = \sqrt{\alpha}U'', \quad s = 0, \quad t = 0$$

und die Gleichung der Projection der Krümmungslinien liefert:

$$y' = -\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}}U'.$$

Diese Werthe von p, q, r, s, t, y' in die allgemeine Gleichung der Krümmungslinien:

$$r\{pq + y'(1+q^2)\} - s\{1+p^2 - y'^2(1+q^2)\} - t\{y'^2pq + y'(1+p^2)\} = 0$$

eingesetzt, wird sie identisch erfüllt.

Dieselbe Operation kann man mit jedem anderen Integral mit zwei Constanten der vorstehenden Differentialgleichungen vornehmen, und ihr Sinn ist eben der, dass jede durch die Integralcharakteristiken gelegte Oberfläche, wenn sie eine Integraloberfläche der betreffenden Differentialgleichungen ist, die Integralcharakteristiken gleichzeitig zu Krümmungslinien hat. Ich werde es, als dem Gegenstande dieser Untersuchung zu fern liegend, unterlassen, den allgemeineren Fall zu betrachten, wo F vier oder alle fünf Variabeln enthält, ohne indessen zu glauben, dass er erhebliche Schwierigkeiten darbietet.

II. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Sollen zwei Kurvenschaaren, deren Differentiale mit d und d_1 bezeichnet werden, Facettelinien sein, so wissen wir, dass diese Differentiale die Gleichung:

$$r\,dx\,d_1x + s\,(dx\,d_1y + d_1x\,dy) + t\,dy\,d_1y = 0$$

erfüllen müssen. Sollen die beiden Schaaren orthogonal sein, so muss noch die Gleichung:

$$(1+p^2)\,dx d_1 x + pq(dx d_1 y + d_1 x dy) + (1+q^2)\,dy d_1 y = 0$$

stattfinden. Dies Beides sind demnach die Gleichungen der Krümmungslinien. Sollen die Charakteristiken der Gleichung $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ Facettelinien sein, so muss F der Gleichung:

$$Rr + Ss + Tt = 0,$$

sollen sie orthogonal sein, muss F der Gleichung:

$$R(1+p^2) + Spq + T(1+q^2) = 0$$

genügen. Das Integral der letzteren Gleichung ist:

$$F(x, y, z, p, q, r-\lambda s, t-\lambda_1 s) = 0,$$

wo $\lambda = \frac{1+p^2}{pq}$, $\lambda_1 = \frac{1+q^2}{pq}$. Es muss also die Gleichung $F = 0$ gleichzeitig auf die vorstehende Form und auf die Form

$$F\left(x, y, z, p, q, \frac{s}{r}, \frac{t}{r}\right) = 0$$

gebracht werden können: eine Anforderung, der auf die allgemeinste Weise Genüge geschieht durch die Annahme, dass F eine willkürliche Funktion von $\frac{r-\lambda s}{t-\lambda_1 s}$ ist. Daher

$$r - \lambda s + \psi(x, y, z, p, q)\,\{\lambda_1 s - t\} = 0$$

die einzige Form von $F = 0$ ist, welche beiden Bedingungen dafür, dass die Charakteristiken Krümmungslinien seien, gleichzeitig genügt*).

---

*) Wenn man aus den beiden Gleichungen der Krümmungslinien z. B. die Differentiale $d_1 x$, dy eliminirt, und $s - \frac{r}{\lambda} \equiv a$, $s - \frac{t}{\lambda_1} \equiv b$ setzt, so folgt die Differentialgleichung der Krümmungslinien in folgender Form:

$$a dx^2 + dx dy\,(b-a) + b dy^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung $Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$ die Differentiale eliminirt, erhält man eine allgemeinere Bedingung dafür, dass die Charakteristiken Krümmungslinien sein, nämlich diese:

$$R^2a^2 + S^2ab + T^2b^2 + RSa(b-a) + STb(b-a) + RT[(b-a)^2 - 2ab] = 0.$$

Allgemeiner ist diese Bedingung deshalb, weil, damit sie erfüllt werde, nur die eine Schaar der Contactcharakteristiken Krümmungslinienschaar zu sein braucht, während beide Schaaren Contactcharakteristiken der im Texte entwickelten Form von $F = 0$

$$r - \lambda s + \psi(x, y, z, p, q)\left\{\lambda_1 s - t\right\} = 0$$

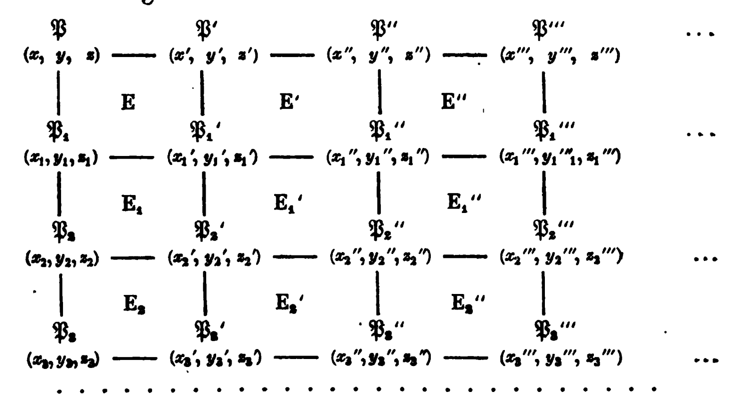
Krümmungslinien sind.

XIII. Construction der Integraloberflächen aus Facetten.

§. 64.

Plan einer übersichtlichen Bezeichnungsweise der Ecken und Kanten einer polyedrischen Oberfläche und darauf bezügliche Formeln.

Die beiden Systeme polygonaler Facettelinien bilden auf der Oberfläche die Ecken und Kanten der Facetten. Die Art, wie wir die Ecken und Facetten bezeichnen wollen, veranschaulicht folgendes Tableau:



In diesem Tableau bezeichnen die Grössen $E_m^{(n)}$ die Facetten, gleichviel ob eben oder gebrochen (§. 61). Die $\mathfrak{P}_m^{(n)}$ bezeichnen die Ecken der polyedrischen Oberfläche und die darunterstehenden $(x_m^{(n)}, y_m^{(n)}, z_m^{(n)})$ deren Coordinaten.

Um sofort auf die spätere Anwendung dieses Algorithmus Bezug zu nehmen, werde ich festsetzen, dass die Reihenfolge:

$$\mathfrak{P}_m^n, \mathfrak{P}_{m+1}^n, \mathfrak{P}_{m+2}^n, \text{ etc.}$$

einer Integralcharakteristik und die Reihenfolge:

$$\mathfrak{P}_m^{(n)}, \mathfrak{P}_m^{(n+1)}, \mathfrak{P}_m^{(n+2)}, \text{ etc.},$$

deren Facettelinie angehören solle, und die letzteren Kurven wollen wir dann schlechtweg Facettelinien nennen.

Alle auf den Punkt $\mathfrak{P}_m^{(n)}$ bezüglichen Grössen sollen die

nämlichen Indices erhalten wie er selbst und zwar auf folgende Weise.

Zunächst seien $-p_m^{(n)}$, $-q_m^{(n)}$ die Neigungstangenten der Normale an die Facette $E_m^{(n)}$.

Ferner: vom Punkt $\mathfrak{P}_m^{(n)}$ gelangt man zum Punkt $\mathfrak{P}_{m+1}^{(n)}$ auf dem Element $ds_m^{(n)}$ einer Charakteristik; die Projectionen von $ds_m^{(n)}$ seien: $dx_m^{(n)}$, $dy_m^{(n)}$, $dz_m^{(n)}$, und die Neigungstangenten von $ds_m^{(n)}$ werden mit $a_m^{(n)}$ und $b_m^{(n)}$ bezeichnet.

Vom Punkt $\mathfrak{P}_m^{(n)}$ gelangt man zum Punkt $\mathfrak{P}_m^{(n+1)}$ auf dem Element $d_1s_m^{(n)}$ einer Facettelinie, dessen Projectionen mit $d_1x_m^{(n)}$, $d_1y_m^{(n)}$, $d_1z_m^{(n)}$ und dessen Neigungstangenten mit $u_m^{(n)}$, $v_m^{(n)}$ zu bezeichnen sind.

Endlich sei $d_2s_m^{(n)}$ mit den Projectionen $d_2x_m^{(n)}$, $d_2y_m^{(n)}$, $d_2z_m^{(u)}$ die Diagonale, welche die Punkte $\mathfrak{P}_m^{(n)}$ und $\mathfrak{P}_{m+1}^{(n+1)}$ verbindet.

Analog soll:

$$p_{m+1}^{(n)}-p_m^{(n)}=dp_m^{(n)},\ p_m^{(n+1)}-p_m^{(n)}=d_1p_m^{(n)},\ p_{m+1}^{(n+1)}-p_m^{(n)}=d_2p_m^{(n)}$$

gesetzt werden. Für q gilt dieselbe Bezeichnungsweise, u. s. f.

Die Projectionen der Strahlen $ds_m^{(n)}$, $d_1s_m^{(n)}$, $d_2s_m^{(n)}$ und überhaupt alle Differenzen genügen Gleichungen von der Form:

$$dx_m^{(n)}+d_1x_m^{(n)}=d_2x_m^{(n)}$$

etc.,

$$dp_m^{(n)}+d_1p_m^{(n)}=d_2p_m^{(n)}$$

etc.,

die wir unter dem Symbol:

$$d+d_1=d_2$$

zusammengefasst haben (§. 60).

Unter der Annahme, die Facetten $E_m^{(n)}$ seien Ebenen, oder der Winkel, welchen ihre Bruchflächen bilden, sei verschwindend gegen den Winkel zweier Facetten gegen einander, findet man für drei aneinanderstossende Facetten $E_m^{(n)}$, $E_{m+1}^{(n)}$, $E_m^{(n+1)}$ folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_m^{(n)}\, d_1 x_{m+1}^{(n)} + q_m^{(n)}\, d_1 y_{m+1}^{(n)} &= dz_{m+1}^{(n)} \\ p_m^{(n)}\, dx_m^{(n+1)} + q_m^{(n)}\, dy_m^{(n+1)} &= dz_m^{(n+1)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots E_m^{(n)}$$

$$p_{m+1}^{(n)}\, d_1 x_{m+1}^{(n)} + q_{m+1}^{(n)}\, d_1 y_{m+1}^{(n)} = d_1 z_{m+1}^{(n)} \quad \ldots E_{m+1}^{(n)},$$

$$p_m^{(n+1)}\, dx_m^{(n+1)} + q_m^{(n+1)}\, dy_m^{(n+1)} = dz_m^{(n+1)} \quad \ldots E_m^{(n+1)}.$$

Aus der ersten Gleichung $E_m^{(n)}$) und $E_{m+1}^{(n)}$) folgt:

$$dp_m^{(n)} d_1 x_{m+1}^{(n)} + dq_m^{(n)} d_1 y_{m+1}^{(n)} = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung $E_m^{(n)}$) und $E_m^{(n+1)}$) ergiebt sich:

$$d_1 p_m^{(n)}\, dx_m^{(n+1)} + d_1 q_m^{(n)}\, dy_m^{(n+1)} = 0$$

und diese Relationen liefern schliesslich die folgenden:

$$a_m^{(n+1)} \equiv \frac{dx_m^{(n+1)}}{dz_m^{(n+1)}} = \frac{d_1 q_m^{(n)}}{\left(p_m^{(n)} d_1 q_m^{(n)}\right)},$$

$$b_m^{(n+1)} \equiv \frac{dy_m^{(n+1)}}{dz_m^{(n+1)}} = \frac{-d_1 p_m^{(n)}}{\left(p_m^{(n)} d_1 q_m^{(n)}\right)},$$

$$u_{m+1}^{(n)} \equiv \frac{d_1 x_{m+1}^{(n)}}{d_1 z_{m+1}^{(n)}} = \frac{dq_m^{(n)}}{\left(p_m^{(n)}\, dq_m^{(n)}\right)},$$

$$v_{m+1}^{(n)} \equiv \frac{d_1 y_{m+1}^{(n)}}{d_1 z_{m+1}^{(n)}} = \frac{-dp_m^{(n)}}{\left(p_m^{(n)}\, dq_m^{(n)}\right)}.$$

Endlich wollen wir mit $\tau_{c_m}^{(n)}$ den Winkel der Facetten $E_m^{(n)}, E_m^{(n+1)}$ gegen einander bezeichnen, sowie den der Facetten $E_m^{(n)}$ und $E_{m+1}^{(n)}$ mit $\tau_{f_m}^{(n)}$, und wollen diese Winkel Contingenzwinkel nennen.

Es wird von Nutzen sein, diese Winkel τ durch die Grössen dp, dq ausdrücken zu können. Die negativen Neigungstangenten der Normalen zweier Ebenen, die den Winkel τ einschliessen, seien:

$$p,\ q \text{ und } p_1 = p + dp,\ q_1 = q + dq$$

und es seien:

$$a = \frac{dq}{(pdq)},\quad b = -\frac{dp}{(pdq)}$$

die Neigungstangenten der Schnittlinien der beiden Ebenen. Dann findet man:

$$N \sin \tau = (pdq) \qquad\qquad \tau),$$

wo

$$N = \left\{ (1+p^2+q^2)(1+p_1^2+q_1^2)(1+a^2+b^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Von der Wurzelgrösse N können wir aussagen, dass sie endlich bleibt, wenn dp und dq verschwinden, somit leuchtet ein, dass τ von der Ordnung dp, dq ist, eine Bemerkung, von der wir später Gebrauch machen werden.

§. 65.

Geometrische Herleitung der Differentialgleichungen der Integralcharakteristiken.

Wir werden annehmen, dass die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ... die Eckpunkte einer polygonalen Charakteristik sind, unter Charakteristik hier jede Kurve verstanden, deren Gleichungen die Gleichung $\Phi = 0$ erfüllen. Die Facette E ist dann zunächst eine Tangentialebene an den für den Punkt $\mathfrak{P}$ als Spitze construirten Kegel $\Phi = 0$ im Strahl ds. Die Facette E_1 ist die Tangentialebene an den Kegel $\Phi_1 = 0$ mit der Spitze $\mathfrak{P}_1$, und der Strahl $d_1 s_1$ ist die Schnittlinie der Tangentialebenen E und E_1. Für irgend einen Punkt $\mathfrak{P}_1'$ des Strahls $d_1 s_1$ als Spitze construiren wir den Polarkegel $\Phi_1' = 0$. Wir werden wieder aus Gründen, die sich bald ergeben werden, annehmen, er werde von der Facette E_1 geschnitten. Dann legen wir eine Tangentialebene an den Kegel $\Phi_1' = 0$ in einem der geschnittenen Strahlen. Diese Tangentialebene liefert die Facette E_1'. Dies vorausgeschickt, wollen wir die Lage der Facetten analytisch bestimmen. Zunächst giebt $F_1 = 0$ entwickelt:

$$0 = Pdp + Qdq + Xdx + Ydy + Zdz + \Sigma_2 F_1,$$

wenn man mit Σ_n die Summe der Glieder der Entwickelung von der $n$ten Ordnung aufwärts bezeichnet. $F_1' = 0$ giebt entwickelt:

$$0 = Pd_2p + Qd_2q + Xd_2x + Yd_2y + Zd_2z + \Sigma_2 F_1'$$

und, die erste Entwickelung von der zweiten abgezogen, folgt:

$$0 = Pd_1p_1 + Qd_1q_1 + Xd_1x_1 + Yd_1y_1 + Zd_1z_1 + \Sigma_2 F_1' - \Sigma_2 F_1.$$

Von dem Theil $Pd_1p_1 + Qd_1q_1$ kann gezeigt werden, dass er zweiter Ordnung ist. Weil nämlich der Strahl ds_1' mit den Neigungstangenten a_1', b_1' zum Kegel $\Phi_1' = 0$ gehört, so gilt für ihn die Gleichung:

$$P_1'b_1' - Q_1'a_1' = 0.$$

Andererseits ist aber (§. 64)

$$a_1'd_1p_1 + b_1'd_1q_1 = 0,$$

woraus folgt:

$$P_1'd_1p_1 + Q_1'd_1q_1 = 0$$

und dies giebt entwickelt:

$$0 = Pd_1p_1 + Qd_1q_1 + d_1p_1\Sigma_1P_1' - d_1q_1\Sigma_1Q_1'.$$

Somit wird die obige Differenz der Entwickelungen:

$$0 = M + R,$$

wo

$$M \equiv Xd_1x_1 + Yd_1y_1 + Zd_1z_1$$

und

$$R \equiv \Sigma_2F_1' + \Sigma_2F_1 - d_1p_1\Sigma_1P_1' + d_1q_1\Sigma_1Q_1'$$

ist. Das Aggregat M können wir umformen, indem wir die Formeln für $u_1 \equiv \frac{d_1x_1}{d_1z_1}$, $v_1 = \frac{d_1y_1}{d_1z_1}$ benutzen. Man erhält:

$$M = \frac{d_1z_1}{(pdq)}\left\{(X+pZ)\,dq - (Y+qZ)dp\right\}.$$

In der Gleichung $M + R = 0$ kommen nun ausser M, das erster Ordnung ist, nur noch Terme von der zweiten Ordnung aufwärts vor. Sehen wir ab von den Termen dritter und höherer Ordnung, so ist der Term zweiter Ordnung aus den zweiten Dimensionen der Grössen:

$$dx,\ dy,\ dz,\ dp,\ dq;\ \ d_1x_1,\ d_1y_1,\ d_1z_1,\ d_1p_1,\ d_1q_1$$

zusammengesetzt. Geht man zur Grenze über, unter der Voraussetzung, dass alle diese Differenzen gleicher Ordnung sind, so folgt:

$$M = 0$$

oder

$$(X + pZ)\,dq - (Y + qZ)\,dp = 0$$

und dies ist genau die Gleichung C_1 des §. 30, welche die Rolle der Bedingungsgleichung der Integralcharakteristiken spielt, da man ausser ihr nur noch die allgemeinen Gleichungen der Charakteristiken:

$$F = 0,$$
$$Pdy - Qdx = 0,$$
$$pdx + qdy = dz$$

hat. Dann ist aber die Richtung des Strahls ds_1 nicht willkürlich, sondern sie ist, wie diejenige aller übrigen Strahlen ds_n eine vollkommen bestimmte.

Umgekehrt, soll die Charakteristik keine Integralcharakteristik sein, soll vielmehr die Richtung des Strahls ds_1 eine beliebige und daher M nicht gleich Null sein, so können jene Differenzen nicht zur selben Ordnung gehören, nicht gleichzeitig verschwinden. Die Ordnung der Differenzen

$$dx,\ dy,\ dz,\ dp,\ dq;\ \ d_1x_1,\ d_1y_1,\ d_1z_1$$

haben wir vollkommen in unserer Gewalt, und wenn sie anders zur Construction einer Oberfläche aus Parallelogrammen mit Seiten gleicher Ordnung dienen sollen, so müssen sie von derselben Ordnung sein. Es können also nur d_1p_1 und d_1q_1 von anderer Ordnung sein, und zwar müssen sie die Quadratwurzel aus den Grössen dz und d_1z_1 enthalten, wenn wir z als Argument ansehen. Da nun der Contingenzwinkel τ_{c_1} von der Ordnung d_1p_1, d_1q_1 ist, so erhellt, dass er nicht von der Ordnung der Grösse d_1z_1, die von der Ordnung seines Bogens ist, sein kann. Beim Uebergang zur Grenze wird man daher keine endlich gekrümmte Fläche erhalten, da der Contingenzwinkel langsamer abnimmt als d_1z_1, und zwar im Verhältniss von $\sqrt{d_1z_1}$ zu d_1z_1 oder von 1 zu $\sqrt{d_1z_1}$, mithin unendlich viel langsamer. Die Krümmung wird daher unendlich gross sein, es wird eine Rückkehrkante entstehen. Es bleibt nun noch übrig, die geometrischen Gründe dieses Verhaltens aufzusuchen, wozu die Kegeltheorie die Mittel bietet.

§. 66.

Ueber Streifschnitte an Kegeln.

Wir denken uns um die Spitze $\mathfrak{P}$ (x, y, z) des Polarkegels $\Phi = 0$ eine Kugel von sehr kleinem Halbmesser ϱ construirt, und für irgend einen Punkt $\mathfrak{P}_1$ der Kugeloberfläche als Spitze sei ebenfalls der Polarkegel construirt. Der Radius $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1} = \varrho$, der die Spitzen beider Kegel, des »Centralkegels« $\mathfrak{P}$ und des »Oberflächenkegels« $\mathfrak{P}_1$, verbindet, mag die Neigungstangenten u und v haben. Nun legen wir durch die Linie $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ Berührungsebenen an die Kegel $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$. Diese werden einen kleinen Winkel τ einschliessen. Ich werde zunächst den

Winkel τ analytisch ausdrücken. Es seien p, q, $p+dp$, $q+dq$ die negativen Neigungstangenten der Normalen an die beiden Berührungsebenen, so ist:

$$udp+vdq=0,$$

und die Entwickelung von $F_1=0$ giebt:

$$0=M+Pdp+Qdq+\Sigma_2 F_1,$$

wo wir dem früheren analog:

$$M\equiv Xu+Yv+Z$$

gesetzt haben. Aus diesen Gleichungen dp, dq bestimmt und in die Gleichung τ) (§. 64) eingesetzt, folgt:

$$N\sin\tau=\frac{M+\Sigma_2 F_1}{Qu-Pv}.$$

Wir wollen nun dies Ergebniss discutiren. Voran muss geschickt werden, dass der Winkel τ für gewisse Gegenden der Kugeloberfläche keinen Sinn hat. Unter der Annahme, der Kegel $\Phi=0$ sei geschlossen und habe die im §. 6 vorausgesetzte Gestalt, darf man offenbar den Punkt $\mathfrak{P}_1$ nicht in die Directrix des Kegels $\Phi=0$ treten lassen, denn hier wird $Pv-Qu=0$, da dann die Linie $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ ein Polarkegelstrahl ist. Innerhalb der Directrix hat der Winkel τ vollends keinen Sinn mehr. Der Strahl $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ muss also zum Strahlenbüschel der Integralkurven (§. 7) gehören, soll der Winkel τ einen Sinn haben. Der Winkel τ ist nun für alle Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Kugel erster Ordnung mit Ausnahme derjenigen, für welche

$$M=0$$

ist. Hier wird er zweiter Ordnung. Für diese Punkte hat man demnach die Gleichungen:

$$Xu+Yv+Z=0,$$
$$pu+qv=1,$$
$$F=0,$$

aus denen durch Elimination von p und q die Gleichung:

$$\Psi(x, y, z, u, v)=0$$

des Facettekegels folgt, die wir schon aus §. 62 kennen.

Die Directrix dieses Kegels auf der Kugeloberfläche trennt mithin, allgemein zu reden, die Kugeloberfläche in Gebiete, für die τ positiv und solche, für die τ negativ ist, wenn man positiv z. B. den Winkel τ nennt, sobald die Berührungsebene an den Kegel $\mathfrak{P}$ den Kegel $\mathfrak{P}_1$ schneidet, negativ, sobald sie daran

vorbeigeht. Diese Betrachtung ergiebt also Folgendes. Legen wir durch die Spitze $\mathfrak{P}$ eines Polarkegels einen Facettestrahl, und construiren für alle Punkte dieses Strahls als Spitzen die Polarkegel, so können wir durch den Facettekegelstrahl eine Ebene legen, welche diese Polarkegel sämmtlich berührt, oder mit deren Berührungsebenen einen Winkel einschliesst, der höherer Ordnung ist, als die Entfernung ihrer Spitzen vom Punkte $\mathfrak{P}_1$.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal den Centralkegel und den Kegel $\mathfrak{P}_1$ auf der Kugeloberfläche, und nehmen wir an, $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ sei kein Strahl des Facettekegels und ausserdem schneide die durch $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ an den Kegel $\mathfrak{P}$ im Strahl ab gelegte Tangentialebene den Kegel $\mathfrak{P}_1$. Wird der Kegel $\mathfrak{P}_1$ ohne Drehung so verschoben, dass seine Spitze in den Punkt $\mathfrak{P}$ fällt, so sieht man, dass der, die Directrix des Kegels $\mathfrak{P}$ im Punkt a, b der Kugeloberfläche berührende grösste Kreis die Directrix des Kegels $\mathfrak{P}_1$ in zwei Punkten a_1, b_1 und a_2, b_2 schneidet, welche vom Punkt ab um einen Winkel abstehen, der niederer Ordnung ist als die Linie $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$, weil die geringste Entfernung der Directrix $\mathfrak{P}_1$ vom Punkt ab von der Ordnung $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ ist. Es wird daher auch der Winkel, welchen eine Tangentialebene an einen der Strahlen a_1, b_1; a_2, b_2 oder an einen diesen benachbarten Strahl des Kegels $\mathfrak{P}_1$ mit der Tangentialebene an den Kegel $\mathfrak{P}$ im Strahl ab bildet, niederer Ordnung sein. Wir werden also zu einer von den Strahlen a, b; $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$; a_1, b_1 oder a_2, b_2 oder einem den letzteren sehr nahen Strahl begrenzten Facette, keine darauf folgende construiren können, die den Kegel $\mathfrak{P}_1$ berührt, und gleichzeitig mit der ersten Facette einen Winkel von der Ordnung $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ einschliesst. Nur wenn der Punkt $\mathfrak{P}_1$ im Facettekegel liegt, wird der Winkel der Strahlen $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ von der Ordnung $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ sein, die geringste Winkelentfernung der Directrix des Kegels $\mathfrak{P}_1$ vom Punkt a, b auf der Kugeloberfläche dagegen wird zweiter Ordnung in Bezug auf $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$, und nun ist die Möglichkeit eröffnet, fortgesetzt Facetten zu construiren, wie ich dies in der Folge zeigen werde.

Zunächst aber will ich, von der Gleichung

$$\Phi\,(x,\ y,\ z,\ a,\ b) = 0$$

ausgehend, zeigen, dass $a_1 - a, = d_1 a$, $b_1 - b = d_1 b$ von der

Ordnung $\sqrt{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ oder der Projectionen d_1x, d_1y, d_1z dieser Linie werden. Aehnlich wie im §. 65 erhalten wir aus:

$$\mathfrak{A}(u-a) + \mathfrak{B}(u-b) = 0,$$
$$\mathfrak{A}(u-a_1) + \mathfrak{B}(v-b_1) = 0$$

und der Entwickelung:

$$0 = \mathfrak{X}d_1x + \mathfrak{Y}d_1y + \mathfrak{Z}d_1z + \mathfrak{A}d_1a + \mathfrak{B}d_1b + \Sigma_2\Phi_1,$$

zunächst:

$$\mathfrak{A}d_1a + \mathfrak{B}d_1b = 0$$

und daher

$$0 = \mathfrak{M}d_1z + \Sigma_2\Phi_1$$

wo

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}$$

ist. Die Form der Entwickelung $\Sigma_2\Phi_1$ gestattet zu setzen:

$$0 = \mathfrak{M}d_1z + \beta_1 d_1z^2 + \beta_2 d_1z d_1a + \beta_3 d_1a^2 + \gamma_1 d_1z^3 + \gamma_2 d_1z^2 d_1a$$
$$+ \gamma_3 d_1z d_1a^2 + \gamma_4 da^3 + \text{etc.},$$

indem man sich d_1b durch d_1a mit Hülfe der Gleichung

$$\mathfrak{A}d_1a + \mathfrak{B}d_1b = 0$$

ausgedrückt vorstellt. Diese Entwickelung giebt, wenn man sie umkehrt, eine solche von der Form:

$$d_1a = g_0 d_1z^{\frac{1}{2}} + g_1 d_1z^{\frac{2}{2}} + g_2 d_1z^{\frac{3}{2}} + \text{etc.},$$

wo

$$g_0 = \pm\sqrt{\frac{-\mathfrak{M}}{\beta_3}} \equiv r,$$
$$g_1 = -\frac{\beta_2 + \gamma_4 r^2}{2\beta_3},$$
$$g_2 = -\frac{1}{\beta_3^2 r}\left\{\beta_3\gamma_1{}^2 + \gamma_1(\beta_2 + 3\gamma_4) + \beta_1\right\} - \gamma_3 - \delta_5 r^3.$$
$$\text{etc.} = \text{etc.}]$$

Wie man sieht, wird die inverse Reihenentwicklung unbrauchbar für $\mathfrak{M} = 0$ oder $r = 0$. Dann ist aber wegen:

$$0 = \beta_1 d_1z^2 + \beta_2 d_1z da + \beta_3 d_1a^2 + \text{etc.},$$

d_1a von der Ordnung d_1z und man muss setzen:

$$d_1a = g_1' d_1z + g_2' d_1z + g_3' d_1z^3 + \text{etc.},$$

wo beispielsweise:

$$g_1' = -\frac{\beta_2}{2\beta_3} \pm \left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{\beta_2}{\beta_3}\right)^2 - \frac{\beta_1}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist.

Da nun für $\mathfrak{M}=0$ d_1a von der Ordnung d_1z wird, so ist die Bedingung $\mathfrak{M}=0$ der früheren $M=0$ äquivalent und die Gleichung $\mathfrak{M}=0$, die wir im §. 43 kennen gelernt haben ist wirklich die Gleichung desjenigen Facettekegels, wel-

chen im §. 62 die Formel $M=0$ ergab, eine Beziehung, zu der man auch analytisch sehr leicht gelangt. Denn man findet $\Phi=0$ durch Elimination von p und q aus den Gleichungen:

$$F=0,$$
$$Pb-Qa=0,$$
$$pa+qb=1,$$

und $F=0$ aus Φ durch Elimination von a und b aus den Gleichungen:

$$\Phi=0,$$
$$\mathfrak{A}q-\mathfrak{B}p=0,$$
$$pa+qb=1.$$

Durch totale Differentiation ergiebt sich:

$$Xd_1x+Yd_1y+Zd_1z+Pd_1p+Qd_1q=0,$$
$$\mathfrak{X}d_1x+\mathfrak{Y}d_1y+\mathfrak{Z}d_1z+\mathfrak{A}d_1a+\mathfrak{B}d_1b=0,$$
$$pd_1a+qd_1b+ad_1p+bd_1q=0.$$

Setzt man nun $Xd_1x+Yd_1y+Zd_1z=0$, so folgt $Pd_1p+Qd_1q=0$ und es ist wegen $Pb-Qa=0$ gleichzeitig:

$$ad_1p+bd_1q=0,$$

daher

$$pd_1a+qd_1b=0,$$

wodurch man dann, wegen $\mathfrak{A}q-\mathfrak{B}p=0$,

$$\mathfrak{X}d_1x+\mathfrak{Y}d_1y+\mathfrak{Z}d_1z=0$$

erhält.

§. 67.

Construction einer polyedrischen Oberfläche, die sich beim Uebergang zur Grenze an eine Integraloberfläche anschliesst.

Bisher haben wir uns bei der Untersuchung der Integraloberflächen der Gleichung $F=0$ nur der Polarkegel $\Phi=0$ bedient. Im letzten Kapitel sind wir mit einem neuen Kegel, dem Facettekegel $\Psi=0$, und seiner geometrischen Bedeutung hinlänglich bekannt geworden, um nun einsehen zu können, dass er ein ebenso wichtiges Element der Construction von Integraloberflächen, wie der Polarkegel ist; was übrigens schon daraus erhellt, dass er zur Definition der Formveränderung des Polarkegels durch den Raum unentbehrlich ist.

Wir denken uns in Zukunft für jeden Punkt des Raumes als Spitze die beiden Kegel $\Phi=0$ und $\Psi=0$ gleichzeitig construirt.

Um eine polyedrische Integraloberfläche zu erhalten, beginnen wir damit, irgend eine polygonale Facettelinie zu construiren, deren Ecken mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ ... zu bezeichnen sind, und deren Elemente:

$$\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'} = d_1 s, \quad \overline{\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''} = d_1 s, \quad \overline{\mathfrak{P}''\mathfrak{P}'''} = d_1 s'', \text{ etc.}$$

Strahlen der für die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, ... als Spitzen construirten Facettekegel Ψ, Ψ', Ψ'', ... sind. Nun legen wir an den Polarkegel Φ durch den Strahl $d_1 s$ eine Tangentialebene, desgleichen eine solche durch den Strahl $d_1 s'$ an den Kegel Φ', u. s. f. Diese Tangentialebenen mögen die Kegel Φ, Φ', Φ'', etc. in den Strahlen a, b; a', b' etc.; berühren. Auf dem Strahl a, b schneiden wir die Länge $ds = \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ ab, construiren für den Punkt $\mathfrak{P}_1$ den Kegel Ψ_1, von dem ein Strahl $d_1 s_1$ den Strahl a', b' im Punkt $\mathfrak{P}_1'$ treffen, und davon die Länge $\overline{\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'} = ds'$ abschneiden wird. Die vier Strahlen:

$$ds, \; d_1 s, \; ds', \; d_1 s_1$$

begrenzen dann die erste gebrochene Facette E: gebrochen, weil die vier Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}_1'$ $\mathfrak{P}_1$ nicht in einer Ebene liegen. Aber, und darauf kommt es hier allein an, die beiden Dreiecke: $\Delta\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'$ und $\Delta\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'$, aus denen die Facette zusammengesetzt ist, und die in der Diagonale $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'}$ aneinanderstossen, bilden einen Winkel mit einander, der zweiter Ordnung ist in Bezug auf die Länge der Strahlen ds, $d_1 s$, etc.

Es wird nun sehr leicht sein, die folgenden Facetten E', E'', etc. zu construiren. Vom Punkt $\mathfrak{P}_1'$ aus ziehen wir den Strahl des Kegels Ψ_1', der den Strahl $a'' b''$ und zwar im Punkt $\mathfrak{P}_1''$ trifft. Dann sind die Ecken der zweiten Facette E':

$$\mathfrak{P}_1', \; \mathfrak{P}', \; \mathfrak{P}'', \; \mathfrak{P}_1''.$$

Ebenso ist die dritte Facette E'' zu construiren, u. s. f. So entsteht die erste Facettenreihe E, E', E''; welche an der einen Seite von der ersten polygonalen Facettelinie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, ... begrenzt wird. Diese Facettenreihe bestimmt eine zweite polygonale Facettelinie:

$$\mathfrak{P}_1, \; \mathfrak{P}_1', \; \mathfrak{P}_1'', \; \ldots.$$

durch die sie eben von der anderen Seite begrenzt wird und deren Elemente wir so eben construirt haben.

Genau wie die Reihe E, E', E'' ... zur polygonalen Facettelinie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, ... lässt sich eine neue Reihe:

$$E_1, \; E_1' \; E_1'', \; \ldots.$$

zur Facettelinie $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_1''$ .... construiren. Dann eine dritte Reihe E_2, E_2', E_2'', ... u. s. f. So schliesst sich Reihe an Reihe und es entsteht die polyedrische Oberfläche, die nunmehr allen Bedingungen entspricht, welche erfüllt sein müssen, damit sie beim Grenzübergang stetig werde: Die Contingenzwinkel τ_c und τ_f sind von der Ordnung der Strahlen ds und d_1s, und die Bruchflächen, aus denen die Facetten bestehen, bilden Winkel zweiter Ordnung.

So ist denn die Aufgabe, die Integraloberflächen der Gleichung $F=0$ geometrisch zu construiren, vollständig gelöst, und zwar ist die Lösung ganz allgemein deshalb, weil die so eben construirte Integraloberfläche eine willkürliche Funktion enthält, nämlich die eine Projection der ersten polygonalen Facettelinie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, ... durch welche die ganze polyedrische Oberfläche bestimmt wurde, bis auf die für das Ergebniss des Grenzübergangs irrelevante Willkürlichkeit der Länge der Strahlen ds, d_1s, d_2s, etc. Genau genommen ist also willkürlich geblieben:

1) die Richtung der einen Projection und die Länge der Strahlen:

$$d_1s,\ d_1s',\ d_1s'',\ d_1s''',\ \ldots.$$

2) die Länge, aber nicht die Richtung der Strahlen:

$$ds,\ ds_1,\ ds_2,\ ds_3,\ \ldots.$$

An diese Construction knüpfen sich zunächst noch einige Bemerkungen.

§. 68.

Zusätze zum vorigen §.

I. Um den Theil: $\Delta\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1'$ der Facette E_1 zu construiren, bedarf es also offenbar der beiden Strahlen d_1s und d_1s'. Denn der Strahl d_1s bestimmt den Strahl ds, der Strahl d_1s' bestimmt den Strahl ds'; beide Strahlen ds und ds' bestimmen, wenn man über die Länge von ds verfügt hat, den Strahl d_1s_1 und dieser den Strahl ds_1, mithin das Dreieck $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1'$. Diese Ueberlegung verallgemeinert, folgt, dass das Dreieck:

$$\Delta\,\mathfrak{P}_m\,\mathfrak{P}_{m+1}\,\mathfrak{P}'$$

bestimmt wird durch die Strahlen

$$d_1s,\ d_1s',\ d_1s'',\ \ldots..\ d_1s^{(m)},$$

und es ist klar, dass mit diesem Dreieck gleichzeitig bestimmt ist das ganze dreieckige Stück polyedrischer Oberfläche, welches liegt zwischen

1) der polygonalen Integralcharakteristik:

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_{m+1},$$

2) der polygonalen Facettelinie:

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots\ldots \mathfrak{P}^{(m+1)},$$

3) der polygonalen Diagonalkurve:

$$\mathfrak{P}^{(m+1)}, \mathfrak{P}_1^{(m)}, \mathfrak{P}_2^{(m-1)}, \ldots\ldots \mathfrak{P}'_{m-1}, \mathfrak{P}'_m, \mathfrak{P}_{m+1}$$

und welches wir mit:

$$\Delta(\mathfrak{P}\mathfrak{P}_{m+1}\mathfrak{P}^{(m+1)})$$

bezeichnen wollen. Dies ist jedoch nur eine Eigenthümlichkeit unserer Construction, da wir aus den Betrachtungen des Capitels XI entnehmen können, dass ein Stück Kurve alle diejenigen Integralstreifen ihrer ganzen Länge nach bestimmt, welche durch dasselbe hindurchgehen. Diese Eigenthümlichkeit unserer Construction besteht darin, dass sie die Terme zweiter Ordnung, welche beim Grenzübergang wegfallen, berücksichtigt. Von ihnen hängt der Winkel der Bruchflächen einer Facette gegen einander ab.

II. Ebenso gut, wie wir die Integraloberfläche von einer Facettelinie aus construirt haben, hätten wir von einer beliebigen polygonalen Kurve ausgehen können. Ich werde kurz angeben, wie. Zu der beliebigen als Diagonalkurve anzusehenden Kurve:

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2'', \mathfrak{P}_3''', \ldots.$$

werden die Kegel:

$$\Phi, \Phi_1', \Phi_2'', \Phi_3''' \ldots$$

construirt, und durch den Strahl $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1'} = d_2s$ wird eine Tangentialebene an den Kegel Φ, durch den Strahl $\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'' = d_2s_1'$ eine solche an den Kegel Φ_1' gelegt, u. s. f. Die Kegel Φ, Φ_1' ... werden berührt in den Strahlen ds, ds_1' ds_2'' ... Zu diesen Strahlen sucht man die Endpunkte:

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2' \mathfrak{P}_3'', \mathfrak{P}_4''', \ldots$$

von denen aus Strahlen: d_1s_1, d_1s_2', d_1s_3''' ... der Kegel:

$$\Psi_1, \Psi_2', \Psi_3'', \ldots$$

durch die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2''$, ... gehen. Die Punkte:

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2', \mathfrak{P}_3'', \ldots$$

bilden dann eine neue Diagonalkurve, zu welcher man eine

dritte nach demselben Verfahren findet, u. s. f. Nachträglich übersieht man leicht, dass z. B. die Punkte:

$$\mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_1',\ \mathfrak{P}_2'$$

eine Facette bilden, deren Bruchflächen:

$$\Delta\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2' \text{ und } \Delta\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2'$$

einen Winkel zweiter Ordnung einschliessen, worauf ich hier nicht weiter eingehen werde.

III. Betrachten wir noch einmal die im vorigen §. construirte polyedrische Integraloberfläche. Wir können die Construction in der Weise modificiren, dass die Facetten eben sind, aber Vernachlässigungen von Grössen zweiter Ordnung bei der Construction jeder Facette stattfinden. Legen wir an den Kegel Φ durch den Strahl d_1s eine Tangentialebene und bezeichnen mit d_ps' die Projection des Strahls ds' (der zum Kegel Φ' gehört) auf jene Tangentialebene so haben wir zu dem beregten Zweck die durch den Strahl d_1s' an den Kegel Φ' zu legende Tangentialebene, welche ihn im Strahl ds' berührt, nur soviel zu drehen, dass sie durch den Strahl d_ps' statt durch den Strahl ds' geht. Der Winkel, um den sie dann gedreht wurde, ist zweiter Ordnung.

IV. Da die Längen von ds, ds_1, ds_2 .... und d_1s, d_1s', d_1s''.... vollkommen unabhängig von einander sind, so ist es keineswegs nöthig, den Grenzübergang gleichzeitig in Beziehung auf Beide stattfinden zu lassen. Sondern man kann z. B. zuerst ds, ds_1, ds_2, ... verschwinden lassen, während d_1s, d_1s', d_1s'', ... endliche Dimensionen behalten. Der Erfolg davon ist, dass man eine Oberfläche erhält, die aus Streifen von Abwickelbaren (hier die Integralstreifen) von endlicher Breite zusammengesetzt ist, ähnlich der Oberfläche einer Frucht, welche man mit einem Messer geschält hat. Die Streifen stossen unter Winkeln an einander, die dann einen zweiten Uebergang zur Grenze in Bezug auf die Strahlen d_1s, d_1s', d_1s'', ... gestatten.

§. 69.

Construction der Integralcharakteristiken und der Integralstreifen.

Zur Vervollständigung dieser Theorie bleibt uns noch übrig, die Construction der Integralcharakteristiken und der

Integralstreifen anzugeben. Es wird damit die geometrische Interpretation der Gleichung $F=0$, soweit dies, ohne besondere Annahmen über ihre Form zu machen, möglich ist, zum Abschluss gelangen.

Was die Integralcharakteristiken betrifft, so ist ihre Construction allerdings in derjenigen der vorigen §§. enthalten. Es ist indessen zweckmässig, sie unabhängig von der willkürlichen Funktion auszuführen, um nachher bei Gelegenheit der Integralstreifen in die Elementarwirkung der willkürlichen Funktion eine bessere Einsicht zu gewinnen.

Unter Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung, welche längs der ganzen Integralcharakteristik von der willkürlichen Funktion influirt werden, ist gemäss §. 65 die Integralcharakteristik folgendermassen zu construiren. Für den Punkt $\mathfrak{P}$ construirt man den Kegel Φ, geht dann längs eines Strahls (a, b) des Kegels Φ bis zum Punkt $\mathfrak{P}_1$, zu dem man die Kegel Φ_1, Ψ_1 construirt. Die Tangentialebene an den Kegel Φ im Strahl (a, b) mag den Kegel Ψ_1 im Strahl (u_1, v_1) schneiden. Nun legt man an den Kegel Φ_1 eine Tangentialebene durch den Strahl (u_1, v_1), die den Kegel Φ_1 in einem gewissen Strahl (a_1, b_1) berühren wird. Dieser Strahl (a_1, b_1) ist dann die Fortsetzung der polygonalen Integralcharakteristik, deren erstes Element der Strahl (a, b) war. Es wird dann für einen ferneren Punkt $\mathfrak{P}_2$ auf dem Strahl (a_1, b_1) die eben für $\mathfrak{P}_1$ ausgeführte Construction wiederholt, wodurch man einen dritten Strahl (a_2, b_2) erhält u. s. f. So entsteht die Integralcharakteristik, und wir erkennen, dass für die Construction der Grenzcharakteristiken der Kegel $\Phi=0$ ausreicht, dass hingegen für die Integralcharakteristiken ein neues Hülfsmittel der Construction erforderlich ist, nämlich der Kegel $\Psi=0$. Dies vorangeschickt, gehe ich zur Construction der Integralstreifen über.

Für den Punkt $\mathfrak{P}$ werden die Kegel Φ, Ψ construirt. An den Kegel Φ wird eine Tangentialebene gelegt durch einen Strahl (u, v) des Kegels Ψ. Für einen Punkt $\mathfrak{P}'$ des Strahls (u, v) werden die Kegel Φ', Ψ' construirt und an den Kegel Φ' eine Tangentialebene durch irgend einen Strahl (u', v') des Kegels Ψ' gelegt. Die beiden Tangentialeben mögen die Kegel Φ und Φ' in den Strahlen (a, b) und (a', b') berühren. Dann

werden für einen Punkt $\mathfrak{P}_1$ auf dem Strahl (a, b) wieder die Kegel Φ_1, Ψ_1 construirt. Der Punkt, in welchem der Strahl (a', b') vom Kegel Ψ_1 geschnitten wird, heisse $\mathfrak{P}_1'$, und nun bilden die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1'$ eine gebrochene Facette. Wir construiren noch die Kegel Φ_1', Ψ_1' und nennen (u_1', v_1') den Strahl, in welchem die Tangentialebene an den Kegel Φ' im Strahl (a', b') den Kegel Ψ_1' schneidet. Dann legen wir wieder durch die Strahlen (u_1, v_1) und (u_1', v_1') Berührungsebenen an die Kegel Φ_1 und Φ_1'. Die berührten Strahlen (a_1, b_1) und (a_1', b_1') sind alsdann die Fortsetzungen der Strahlen (a, b), (a', b'), und so kann man die beiden Integralcharakteristiken fortsetzen, zwischen denen nunmehr, aus gebrochenen Facetten zusammengesetzt, der Integralstreifen liegt.

Wir sind jetzt im Stande zu übersehen, wie der Integralstreifen durch zwei aneinanderstossende Elemente der willkürlichen Kurve, welche die Integraloberfläche individualisirt, bestimmt wird.

Es sei $d_2 s = \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1'}$ das eine Element und $d_2 s_1' = \overline{\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2''}$ das zweite Element. Wir legen durch $d_2 s$ an den Kegel Φ eine Tangentialebene, und suchen einen solchen Punkt $\mathfrak{P}_1$ auf dem Strahl (a, b), dass der Kegel Ψ_1 den Punkt $\mathfrak{P}_1'$ enthalte. Dann ist die Lage der Tangentialebene an den Kegel Φ_1' und mit ihr der Strahl (a_1', b_1') dadurch bestimmt, dass sie durch den Strahl $d_2 s_1'$ gehen muss. Die Tangentialebene an den Kegel Φ_1 muss durch den Strahl $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1'} \equiv (u_1, v_1)$ gehen, und dies bestimmt den Strahl (a_1, b_1): somit ist der Integralstreifen bestimmt. Ein Element $d_1 s$ bestimmt also eine Integralcharakteristik, zwei Elemente bestimmen deren zwei oder einen Integralstreifen, und jedes folgende Element bestimmt je einen Integralstreifen.

§. 70.

Ueber eine Bedingung, der man die Integralkurven unterwerfen kann.

Diese Betrachtungen führen uns nun einen Schritt weiter, als wir in den Cap. X und XI gelangt waren. Wir hatten gefunden, dass man durch alle Kurven K, K_1, ..., welche einen Punkt $\mathfrak{P}$ passiren, und dort von einer den Kegel Φ im Strahl (a, b) be-

rührenden Ebene ihrerseits berührt werden, Integraloberflächen legen könne, welche die vom Strahl (a, b) im Punkt $\mathfrak{P}$ berührte Integralcharakteristik gemein haben, und sich in dieser berühren. Wir wollen nun zunächst die geometrische Bedingung dafür aufstellen, dass die Rückkehrkanten der durch die Kurven K, K_1, ... gelegten Integraloberflächen sich in **einem** Punkt der gemeinsamen Integralcharakteristik schneiden.

Diese Bedingung finden wir am bequemsten, indem wir auf die Construction des §. 67 zurückgehen.

Die willkürliche Funktion war dort die eine Projection der Facettelinie

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \text{ etc.}$$

und ein Stück:

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'' \ldots \mathfrak{P}^{(m+1)}$$

derselben bestimmte den Integralstreifen:

$$E, E_1, E_2, \ldots E_{m+1},$$

dessen Facetten E gebrochen sind. Unter Vernachlässigung der Terme zweiter Ordnung, die beim Grenzübergang ohnehin verschwinden, bestimmen aber nach §. 69 die beiden Facettelinienelemente

$$d_1 s = \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}, \; d_1 s' = \overline{\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''}$$

den ganzen Integralstreifen E, E_1, ...; sowie das fernere Element $d_1 s'' = \mathfrak{P}''\mathfrak{P}'''$ noch den Integralstreifen E', E_1', E_2'', ... bestimmt, u. s. f. Denkt man sich nun die Lage und Länge der Elemente $d_1 s$ und $d_1 s'$ fest, so wird offenbar stets der nämliche Integralstreifen an der Grenze erhalten werden, wie man auch über die Länge der Elemente von Integralcharakteristiken ds und ds' verfügen mag, da ihre Lage, d. h. die Lage der Strahlen (a, b) und (a', b') durch die Elemente $d_1 s$ und $d_1 s'$ gegeben ist.

Es sind aber die Diagonalen:

$$d_2 s = \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1'} \text{ und } d_2 s_1 = \overline{\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2''}$$

zwei successive Elemente einer durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehenden Kurve K auf der Integraloberfläche. Mit der Länge des Strahls ds variirt die Lage von $d_2 s$, mit der Länge von ds_1 variirt die Lage von $d_2 s_1'$. Durch Variation von ds und ds_1 werden wir mithin Tangente und Krümmung der Kurve K verändern, aber innerhalb solcher Grenzen, dass durch die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1'$

der Kurve K immer die nämlichen Integralcharakteristiken gehen, dass mithin der an den Punkt $\mathfrak{P}$ anliegende Integralstreifen unverändert bleibt.

Wenn nun alle Integraloberflächen, die durch verschiedene Kurven K, K_1, ..., welche sich im Punkt $\mathfrak{P}$ schneiden, gelegt werden, nicht allein die durch $\mathfrak{P}$ gehende Integralcharakteristik, sondern auch den Integralstreifen, der an diese Charakteristik grenzt, gemein haben, so müssen sich nach Cap. XI. ihre Rückkehrkanten in dem nämlichen Punkte jener Integralcharakteristik schneiden.

Die geometrische Eigenschaft, welche die Kurven K im Punkt $\mathfrak{P}$ besitzen müssen, um diese Bedingung zu erfüllen, ist festgestellt: die Länge der Strahlen ds und ds_1 muss so bestimmt werden können, dass die Elemente der Kurven K Diagonalen der Facetten E und E_1' bleiben. Es wird nun darauf ankommen, diese Bedingung analytisch zu formuliren.

§. 71.

Ueber den Contact der Abwickelbaren.

Wir wollen diese Untersuchung zunächst bei den Abwickelbaren durchführen.

Die zu betrachtende Abwickelbare sei der Ort der Geraden c, c_1, c_2, ...

Es werde c von c_1 im Punkt π, c_1 von c_2 im Punkt π_1, c_2 von c_3 im Punkt π_2, u. s. f. geschnitten. Wir legen durch die Geraden c, c_1 ... eine senkrechte Trajectorie, welche c im Punkt $\mathfrak{P}$, c_1 im Punkt $\mathfrak{P}'$, u. s. w. schneidet; dann durch die Geraden c, c_1 ... irgend eine andere Kurve, welche c im Punkt $\mathfrak{P}$, c_1 im Punkt $\mathfrak{P}_1'$, c_2 im Punkt $\mathfrak{P}_2''$, u. s. f. schneidet. Es mögen die Neigungstangenten von $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$, $\overline{\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''}$ u. s. w. (u, v), (u', v'), u. s. w.; diejenigen von $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1'}$, $\overline{\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2''}$, u. s. w. (g, h), (g_1', h_1') u. s. w. heissen. Endlich legen wir Kurven durch die Punkte $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2''$, ..., parallel der Kurve $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, ... (unter parallelen Kurven auf einer Abwickelbaren solche verstanden, von denen je zwei zwischen zwei Geraden c_n, c_{n+1} eingeschlossene Elemente parallel sind). In Beziehung auf die Differenzen und Projectionen der Elemente aller dieser Kurven gelten dann die bereits öfters benutzten Bezeichnungen.

Die Neigungstangenten der Geraden c_n mögen (a_n, b_n) und die Neigungstangenten der Normale an die Integralstreifen (c_n, π_n, c_{n+1}) mögen $-p_n$, $-q_n$ heissen.

Wir werden nun die Bedingungen dafür aufsuchen, dass die Kurven (u, v) und (g, h) einen, zwei, oder mehrere Integralstreifen mit einander gemein haben.

Fall I. Die Elemente (u, v) und (g, h) liegen auf dem Streifen (c, π, c_1). Dann müssen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} pg + qh &= 1 \\ pu + qv &= 1 \\ F \equiv F(p, q) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{I}$$

erfüllt werden.

Fall II. Die Elemente (u, v), (u', v'), (g, h), (g_1', h_1') liegen auf dem Streifen (c, π, c_1), (c_1, π_1, c_2). Dann finden ausser den vorigen noch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p'g_1' + q'h_1' &= 1, \\ p'u' + q'v' &= 1, \\ F' &= 0 \end{aligned}$$

statt. Es folgt daraus:

$$gdp + hdq + pd_2g + qd_2h = 0 \text{ *)},$$
$$udp + vdq + pd_1u + qd_1v = 0.$$

Ausserdem erhält man durch Entwickelung von $F' = 0$:

$$Pdp + Qdq = 0.$$

Aus den letzten drei Gleichungen dp und dq eliminirt, folgt:

$$(Pv)\{pd_2q + qd_2h\} - (Ph)\{pd_1u + qd_1v\} = 0 \;\ldots.\; A$$

wo ich $Pv - Qu \equiv (Pv)$; $Ph - Qg \equiv (Ph)$ gesetzt habe. Betrachtet man die Gleichungen der Kurve (u, v) als in der Form:

$$u = \varphi(z), \quad v = \varphi_1(z),$$

diejenigen der Kurve (g, h) als in der Form:

$$g = \psi(z), \quad h = \psi_1(z)$$

gegeben, so ist

$$d_2g = \frac{dg}{dz}\, d_2z, \quad d_2h = \frac{dh}{dz}\, d_2z, \quad d_1u = \frac{du}{dz}\, d_1z, \quad d_1v = \frac{dv}{dz}\, d_1z$$

und es wird:

$$(Pv)\, G\, d_2z - (Ph)\, U\, d_1z = 0 \;\ldots\; B,$$

---

*) Ich gebe hier dem d vor p und q keinen Index, weil bei den Abwickelbaren

$$d_1p = d_2p, \; dp = 0,$$
$$d_1q = d_2q, \; dq = 0,$$

ist.

Wenn wir der Kürze halber $p\frac{dg}{dz}+q\frac{dh}{dz}\equiv G$, $p\frac{du}{dz}+q\frac{dv}{dz}=U$ setzen. Nun ist:

$$d_2z=d_1z+dz'.$$

Ferner hat man:

$$g=\frac{d_2x}{d_2z}=\frac{ud_1z+adz'}{d_1z+dz'},$$
$$h=\frac{d_2y}{d_2z}=\frac{vd_1z+bdz'}{d_1z+dz'};$$

und wegen

$$a=\frac{P}{Pp+Qq},\ b=\frac{Q}{Pp+Qq}$$

folgt hieraus:

$$dz'=d_1z(gv)\frac{Pp+Qq}{(Ph)},$$

wo $(gv)\equiv gv-hu$. Diesen Werth von dz' in $d_2z=d_1z+dz'$ substituirt, ergiebt sich:

$$d_2z=d_1z\frac{(Pv)}{(Ph)}.$$

Somit geht B über in:

$$(Pv)^2G-(Ph^2)U=0\ \dots\ \text{II}.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass die der Gleichung $F=0$ genügenden Abwickelbaren, welche man durch die Kurven (u, v) und (g, h) legt, die Geraden c und c_1, mithin den Punkt π gemein haben.

Fall III. Die Elemente (u, v), (u', v'), (u'', v''); (g, h), (g_1', h_1'), (g_2'', h_2'') liegen auf den Streifen: (c, π, c_1), (c_1, π_1, c_2), (c_2, π_2, c_3).

Will man diesen Fall wie den vorigen durch Construction vom Punkt $\mathfrak{P}$ aus behandeln, indem man successiv die geometrischen Symbole durch analytische ersetzt, so nehmen die Formeln alsbald eine entmuthigende Prolixität an, weil man nun die Glieder zweiter Ordnung der Entwickelungen nach den Differentialen mit in den Calcul aufnehmen muss.

Dagegen führt folgender indirecte Weg leichter zum Ziele. Setzen wir:

$$B\equiv(Pv)\{pd_2g+qd_2h\}-(Ph)\{pd_1u+qd_1v\}=0,$$

so hat man für den Punkt $\mathfrak{P}_1'$:

$$B_1'\equiv(P'v_1')\{p'd_2g_1'+q'd_2h_1'\}-(P'h_1')\{p'd_1u_1'+q'd_1v_1'\}=0.$$

Gehören die Grössen u_1', v_1', d_1u_1', d_1v_1' zu der auf den Geraden c, c_1, c_2 ... senkrechten Trajectorie, welche durch den Punkt $\mathfrak{P}_1'$ geht, so ist:

$$\begin{matrix} u_1'=u',\ u_1''=u'' \\ v_1'=v',\ v_1''=v'' \end{matrix} \text{ etc. } \begin{matrix} d_1u_1'=u_1''-u_1'=u''-u'=d_1u', \\ d_1v_1'=v_1''-v_1'=v''-v'=d_1v' \end{matrix}$$

und es wird:

$$B_1'\equiv(P'v')\{p'd_2g_1'+q'd_2h_1'\}-(P'h_1')\{p'd_1u'+q'd_1v'\}=0.$$

Bilden wir jetzt die Differenz $d_2B=B_1'-B$. Es kommen darin folgende Typen von Differenzen vor:

$$P'-P,\ u'-u,\ g_1'-g,$$
$$d_2g_1'-d_2g,\ d_1u'-d_1u.$$

Diesen wollen wir ihre analytische Form ertheilen. Der Kürze halber setzen wir $R\equiv\frac{\partial P}{\partial p}$, $S\equiv\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}$, $T=\frac{\partial Q}{\partial q}$. Dann ist:

$$P'-P=Rdp+Sdq=\frac{dp}{Q}(RQ-SP)$$

und aus Fall II kennen wir folgende Ausdrücke für $\frac{dp}{Q}$:

$$\frac{dp}{Q}=\frac{pd_2g+qd_2h}{(Ph)}=\frac{pd_1u+qd_1v}{(Pu)}.$$

Man hat die Wahl eines von diesen Ausdrücken so zu treffen, dass die Schlussformel symmetrisch wird.

Was ferner die Differenzen $u'-u=d_1u$, $g_1'-g=d_2g$ betrifft, so wissen wir aus Fall II ebenfalls:

$$d_1u=\frac{du}{dz}d_1z,\ d_2g=\frac{dg}{dz}d_2z$$

und

$$d_2z=d_1z\frac{(Pv)}{(Ph)}.$$

Endlich sind die Differenzen

$$d_2g_1'-d_2g=d_2d_2g \text{ und } d_1u'-d_1u=d_1d_1u$$

zu transformiren. Es ist:

$$d_2d_2g=g_2''-g_1'-(g_1'-g)=g_2''-2g_1'+g.$$

Nun ist auch

$$g=\psi(z),\ g_1'=\psi(z+d_2z),\ g_2''=\psi(z+d_2z+d_2z_1'),\ \text{etc.}$$

Entwickelt man die ψ und bildet jene Differenz, so folgt:

$$d_2d_2g=\frac{\partial g}{\partial z}d_2d_2z+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(d_2z)^2.$$

Ebenso findet man:

$$d_1d_1u=\frac{\partial u}{\partial z}d_1d_1z+\frac{d^2u}{dz^2}(d_1z)^2.$$

Zwischen d_1d_1z und d_2d_2z findet eine Relation statt. Zieht man

$$(Ph)\, d_2 z - (Pv)\, d_1 z = 0$$

von

$$(Ph_1')\, d_2 z_1' - (P'v')\, d_1 z' = 0$$

ab, so folgt:

$$d_2 (Ph)\, d_2 z - d_1 (Pv)\, d_1 z + (Ph)\, d_2 d_2 z - (Pv)\, d_1 d_1 z = 0$$

unter $d_2(Ph)$ und $d_1(Pv)$ die Differenzen $(P'h_1') - (Ph)$ und $(P'v') - (Pv)$ verstanden.

Nun ist das Material vorhanden, um $d_2 B$ zu bilden. Man erhält zunächst:

$$d_2 B \equiv d_1 (Pv) \{p d_2 g + q d_2 h\} - d_2 (Ph) \{p d_1 u + q d_1 v\},$$

$$+ (Pv) \{dp d_2 g + dq d_2 h + d_2 z^2 (p \frac{d^2 g}{dz^2} + q \frac{d^2 h}{dz^2}) + d_2 d_2 z (G)\},$$

$$+ (Ph) \{dp d_1 u + dq d_1 v + d_1 z^2 (p \frac{d^2 u}{dz^2} + q \frac{d^2 v}{d^2 z}) + d_1 d_1 z (U)\} = 0.$$

Vergleichen wir den Term:

$$d_2 d_2 z (Pv)\, G - d_1 d_1 z (Ph)\, U$$

mit der so eben gefundenen Relation für $d_1 d_1 z$ und $d_2 d_2 z$ und mit der Gleichung II des Fall II, so finden wir, dass statt seiner geschrieben werden kann:

$$-\tfrac{1}{2}\left[d_2 (Ph) d_2 z - d_1 (Pv) d_1 z\right]\left(G \frac{(Pv)}{(Ph)} + U \frac{(Ph)}{(Pv)}\right).$$

Und hiermit in $d_2 B$ zurückgegangen, folgt:

$$d_2 B \equiv \left(\frac{d_2 z}{d_1 z} G + \frac{d_1 z}{d_2 z} U\right)\left[d_1 (Pv) d_1 z + d_2 (Ph) d_2 z\right]$$

$$+ (Pv) \left[dp d_2 g + dq d_2 h + d_2 z^2 \left(p \frac{d^2 g}{dz^2} + q \frac{d^2 h}{dz^2}\right)\right]$$

$$- (Ph) \left[dp d_1 u + dq d_1 v + d_1 z^2 \left(p \frac{d^2 u}{dz^2} + q \frac{d^2 v}{dz^2}\right)\right] = 0.$$

Die weitere Transformation liegt nun auf der Hand: Man hat die Differentiale dp, dq, $d_1 u$, $d_1 v$, $d_2 g$, $d_2 h$ $d_2 z$ auf die mehrfach angegebene Weise auszudrücken, und findet nach den nöthigen Reductionen endlich:

$$0 = \tfrac{1}{2}\left(G \frac{(Pv)}{(Ph)} + U \frac{(Ph)}{(Pv)}\right)\left\{(Ph)^2 \left(P \frac{dv}{dz} - Q \frac{du}{dz}\right) - (Pv)^2 \left(P \frac{dh}{dz} - Q \frac{dg}{dz}\right)\right\},$$

$$+ (hu)\left(G \frac{(Pv)}{(Ph)} + U \frac{(Ph)}{(Pv)}\right)^2 (RQ^2 + TP^2) + (Pv)^2 \left\{p \frac{d^2 g}{dz^2} + q \frac{d^2 h}{dz^2}\right\}$$

$$- (Ph)^2 \left\{p \frac{d^2 u}{dz^2} + q \frac{d^2 v}{dz^2}\right\} \qquad \text{III.}$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass zwei der Gleichung $F = 0$ genügende Abwickelbaren, welche durch die Kurven (u, v), (g, h) gelegt sind, im Durchschnittspunkt der beiden Kurven

die drei Geraden c, c_1, c_2, mithin die Punkte π und π_1 der Rückkehrkante gemein haben.

Es hat kein Interesse, diese Bedingung für Berührungen höherer Ordnungen, als eben geschehen, aufzusuchen, da das Gesetz, nach welchem sie gebildet wird, kein einfaches zu sein scheint. Ich habe nur das Verfahren angeben wollen, nach dem man, wie ich glaube, am kürzesten zu den Bedingungen höherer Ordnung gelangt, weil dies für die partiellen Differentialgleichungen, welche x, y, z enthalten, von Nutzen sein kann. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass, wenn Fall III stattfindet, gleichzeitig die Bedingungen I, II, III erfüllt sein müssen.

§. 72.

Bemerkungen über Fall II.

Sollen die durch die Kurven (u, v) und (g, h) gelegten Abwickelbaren die Geraden c und c_1 und den Punkt π gemein haben, so müssen demnach stattfinden die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F(p, q) &= 0 \\ pu+qv &= 1 \\ pg+qh &= 1 \\ (Ph)^2U-(Pv)^2G &= 0 \end{aligned}\right\} \text{II},$$

wo wieder $U \equiv p\frac{du}{dz}+q\frac{dv}{dz}$, $G \equiv p\frac{dg}{dh}+q\frac{dh}{dz}$ ist.

I. Die beiden Abwickelbaren werden sich dann längs der Geraden c osculiren, da der Polarkegel π (das Integralconoid in diesem Falle) die eine, wie die andere osculirt. Findet noch die Gleichung III des vorigen §. statt, so ist die Berührung der Abwickelbaren dritter Ordnung, u. s. f. Ferner kann man aussagen von zwei Abwickelbaren, die beide der Gleichung $F=0$ genügen, und einen Punkt der Rückkehrkanten mit der ihn treffenden Charakteristik gemein haben, dass ihre Rückkehrkanten sich in diesem Punkt berühren, denn sie haben in diesem Punkt die Tangente gemein. Wenn die Abwickelbaren zwei Geraden gemein haben, so müssen die Rückkehrkanten eine Berührung zweiter Ordnung eingehen, denn sie haben zwei Tangenten gemein, u. s. f.

II. Denkt man sich irgend zwei Kurvenschaaren auf einer

Abwickelbaren gezeichnet, so müssen deren Elemente in jedem Punkt die Bedingungen I, II, III, etc. erfüllen. Es seien wieder die Bedingungen I:

$$F(p, q) = 0,$$
$$pu + qv = 1,$$
$$pg + qh = 1.$$

Ich werde die Differentialquotienten in der Richtung der einen Schaar nicht weiter kennzeichnen. In der Richtung der anderen Schaar wird der Index 1 an das d gehängt werden. Die Bedingungen I geben dann differenzirt:

$$\left(P\frac{dp}{dz} + Q\frac{dq}{dz}\right) dz = 0,$$
$$\left(P\frac{d_1p}{d_1z} + Q\frac{d_1q}{d_1z}\right) d_1z = 0,$$
$$\left(\frac{dp}{dz}u + \frac{dq}{dz}v + p\frac{du}{dz} + q\frac{dv}{dz}\right) dz = 0,$$
$$\left(\frac{d_1p}{d_1z}g + \frac{d_1q}{d_1z}h + p\frac{d_1g}{d_1z} + q\frac{d_1h}{d_1z}\right) d_1z = 0.$$

Wir sehen, dass aus diesen Gleichungen die Differentialquotienten von p nicht eliminirt werden können. Die Elimination wird aber möglich, wenn man über dz und d_1z so verfügt, dass die Gleichungen:

$$\frac{dp}{dz}dz = \frac{d_1p}{d_1z}d_1z \text{ oder } dp = d_1p,$$
$$\frac{dq}{dz}dz = \frac{d_1q}{d_1z}d_1z \text{ oder } dp = d_1q$$

stattfinden, wie dies die Natur der Abwickelbaren gestattet. Die Ermittelung der Werthe von dz und d_1z geschah im vorigen §. (Fall II.)

Wir werden im nächsten §. diese Betrachtung auf die partiellen Differentialgleichungen mit allen Variabeln ausdehnen. Differenzirt man nämlich im Sinne der beiden Kurven (u, v) und (g, h) die Gleichungen:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$
$$pu + qv = 1,$$
$$pg + qh = 1,$$

so wird man wieder die Differentiale von p und q nicht eliminiren können. Um dies möglich zu machen, sind zwischen dp und d_1p, dq und d_1q Relationen aufzustellen, wie sie die Differentialgleichung zulässt.

§. 73.

Die Bedingung für die Osculation zweier Integraloberflächen der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Um diese Bedingung zu formuliren, werden wir die Facetten E, E_1, E', E_1' brauchen. Es ist überflüssig, die Facetten als gebrochen anzusehen, da wir beim Grenzübergang Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen.

Bezeichnen wir die Neigungstangenten des Strahls $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1'}$ oder d_2s mit (g, h); folglich diejenigen des Strahls $\overline{\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2''}$ oder d_2s_1' mit g_1', h_1'; so wollen wir zunächst die Aufgabe behandeln, deren Zusammenhang mit den Neigungstangenten (u, v), (u', v') der Facettelinienelemente d_1s und d_1s' zu ermitteln. Ich beginne damit, die Formeln, deren wir bedürfen, zusammenzustellen. Es ist

$$\left.\begin{aligned} d_2 &= d_1 + d' \\ \text{oder z. B.}\quad d_2x &= d_1x + dx' \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Ferner:

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{d_2x}{d_2z} = \frac{ud_1z + a'dz}{d_1z + dz'} = \frac{ud_1z + adz'}{d_1z + dz'} \\ h &= \frac{d_2y}{d_2z} = \frac{vd_1z + b'dz'}{d_1z + dz'} = \frac{vd_1z + bdz'}{d_1z + dz'} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

unter Vernachlässigung der Terme zweiter Ordnung. Ausserdem gelten für die Facette E die Constructionsformeln:

$$pu + qv = 1 \qquad 3)$$
$$pg + qh = 1 \qquad 4)$$
$$pa + qb = 1 \qquad 5)$$

a und b die Neigungstangenten des Strahls $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ oder ds. Aus 3) 4) 5) folgt beiläufig bemerkt: $(g-u)(b-h)-(h-v)(a-g)=0$. Die Facetten E' und E_1' liefern die Formeln:

$$p'u' + q'v' = 1 \qquad 6)$$
$$p'u_1' + q'v_1' = 1 \qquad 7)$$
$$p_1'u_1' + q_1'v_1' = 1 \qquad 8)$$
$$p_1'g_1' + q_1'h_1' = 1 \qquad 9)$$

Endlich gehören noch hierher die auf die verschiedenen Ecken zu beziehenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} F=0,\ Xu+Yv+Z=0,\ Pb-Qa=0 \\ Pd_1p+Qd_1q=0, \end{aligned}\right\} \quad 10).$$

Dies ist das Material, welches wir brauchen.

Gleichung 4) von 9) abgezogen, folgt wegen 1):

$$pd_2g+qd_2h+g(d_1p+dp')+h(d_1q+dq')=0 \qquad \text{I.}$$

Es kommt zunächst darauf an, in diesem Ausdruck dp' und dq' zu ersetzen durch Grössen, die sich nur auf die Facetten E und E' und beziehen. Aus 3), 10) und 11) folgt:

$$ud_1p+vd_1q+pd_2u+qd_2v=0,$$
$$ud_2p+vd_2q+pd_2u+qd_2v=0.$$

Die erste von der zweiten dieser Gleichungen abgezogen, kommt:

$$dp'u+dq'v=0 \qquad 11)$$

Ferner ist:

$$F_1'-F \equiv P(d_1p+dp')+Q(d_1q+dq')+d_2z(Xg+Yh+Z)=0 \quad 12).$$

Mit Hülfe von 11) und 12) kann man dp' und dq' aus I entfernen, und erhält:

$$(Pv)\left\{p\frac{dg}{dz}+q\frac{dh}{dz}\right\}d_2z-(Ph)\left\{p\frac{du}{dz}+q\frac{dv}{dz}\right\}d_1z$$
$$+d_2z(hu)(Xg+Yh+Z)=0. \qquad \text{II.}$$

wo, wie im §. 71 Fall II, die Neigungstangenten u, v; g, h als Funktionen von z gegeben angenommen sind, und

$$\left(p\frac{du}{dz}+q\frac{dv}{dz}\right) \text{ statt } u\frac{dp}{dz}+v\frac{dq}{dz}$$

gesetzt worden ist. Für d_2z findet man, ganz wie §. 71 Fall II gezeigt wurde, aus 2) und wegen der bekannten Werthe von a und b den Ausdruck:

$$d_2z=d_1z\frac{(Pv)}{(Ph)}$$

und dies in II eingesetzt kommt:

$$(Pv)^2G-(Ph)^2U-(hu)^2(PX+QY)+Z[P(v-h)-Q(u-g)]=0 \quad \text{III.}$$

Die Symmetrie ist dadurch hergestellt, dass ich den für sich verschwindenden Term $-(hu)(Ph)(Xu+Yv+Z)$ hinzuaddirt habe.

Gleichung III ist nun die gesuchte Bedingung. Will man sie in der Form haben, dass die beiden sich schneidenden Kurven beliebige seien, und die eine nicht etwa eine Facettelinie, so hat man die Gleichung III einmal für die Neigungstangenten g, h der einen Kurve, dann für diejenigen γ, $\varkappa$ der anderen Kurve aufzustellen, und aus beiden so erhaltenen Gleichungen U, u, v zu eliminiren. Man findet:

$$0=\{P(X+pZ)+Q(Y+qZ)\}[(Ph)^2\Gamma-(P\varkappa)^2G]$$
$$+(Ph)^2(X\gamma+Y\varkappa+Z)-(P\varkappa)^2(Xg+Yh+Z) \qquad \text{IV,}$$

wo $\Gamma = p\frac{d\gamma}{dz} + q\frac{d\varkappa}{dz}$. Die Elimination von u und v geschieht mit Hülfe der Formeln:

$$u = -\frac{Y+qZ}{Xq+Yp}, \quad v = \frac{X+pZ}{Xq-Yp},$$

aus denen folgt:

$$(hu)\,(Xq+Yp) + Xg + Yh + Z = 0,$$
$$(Pv)\,(Xq-Yp) = P(X+pZ) + Q(Y+qZ).$$

Es ist leicht, die obigen Formeln in Grenzfällen zu bestätigen. Die Gleichung III wird identisch erfüllt, erstens, wenn die Diagonalkurve (g, h) mit der Facettelinie zusammenfällt. Man sieht dies auf den ersten Blick. Dann, wenn die Kurve (g, h) mit der Charakteristik (a, b) zusammenfällt. Man hat nur a und b statt g und h, ferner $a\frac{dp}{dz} + b\frac{dq}{dz}$ statt $p\frac{da}{dz} + q\frac{db}{dz}$ zu setzen und die bekannten Gleichungen der Charakteristiken zu benutzen, um sich davon zu überzeugen. Endlich erhält man III aus IV zurück, wenn man u und v statt γ und $\varkappa$ schreibt.

Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

Wenn durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ zwei Kurven gehen, deren Neigungstangenten g, h und γ, $\varkappa$ als Funktionen von z gegeben sind, so findet eine Berührung zweiter Ordnung statt zwischen den Integraloberflächen der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$, die man durch diese Kurven legt, und zwar findet diese Berührung statt längs der Charakteristik, die mit den Neigungstangenten a, b durch den Punkt $\mathfrak{P}$ geht; wenn 1) zwischen den Neigungstangenten a, b; g, h; γ, $\varkappa$; p, q die Beziehungen:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$
$$Pb - Qa = 0,$$
$$pa + qb = 1,$$
$$pg + qh = 1,$$
$$p\gamma + q\varkappa = 1,$$

gelten, und 2) die Differentialquotienten der Neigungstangenten g, h; γ, $\varkappa$, nämlich $\frac{dg}{dz}, \frac{dh}{dz}; \frac{d\gamma}{dz}, \frac{d\varkappa}{dz}$ die Gleichung IV für den Punkt $\mathfrak{P}$ erfüllen.

Dann haben die beiden Integraloberflächen ausserdem in der Charakteristik, die den Ort ihrer Osculation bildet, einen

Punkt der Rückkehrkante und die beiden sich dort schneidenden Tangenten derselben gemein. Im übrigen gelten die im vorigen §. über den Contact der Abwickelbaren gemachten Bemerkungen hier unverändert.

Die Aufsuchung der allgemeineren Formeln für den Contact der Integraloberflächen dürfte, ihrer Weitläufigkeit wegen, kaum lohnend sein. Das geometrische Princip, welches ihr zu Grunde liegen musste, ist folgendes.

Wenn man die Strahlen:

$$ds,\ ds_1,\ ds_2,\ \ldots\ldots\ ds_n$$

variirt, während die Strahlen:

$$d_1s,\ d_1s',\ d_1s'',\ \ldots\ldots\ d_1s^{(n)}$$

unverändert bleiben, so werden die durch die verschiedenen so entstandenen Diagonalkurven:

$$d_2s,\ d_2s_1',\ d_2s_2'',\ \ldots\ldots\ d_2s_n^{(n)}$$

zu legenden Integraloberflächen längs der Charakteristik $(a,\ b)$ eine Berührung von der $(n+1)$sten Ordnung eingehen. Wird n unendlich, so hat man die geometrische Bedingung dafür, dass verschiedene Kurven auf einer Integraloberfläche liegen.

§. 74.

Eine andere Deutung der Formeln der vorigen §§.

Die Eigenthümlichkeit dieser Gattung Untersuchungen besteht darin, dass man aus der Form der Differentialgleichung möglichst viel allgemeine Eigenschaften des Integrals herauszulesen sucht. Und in diesem Sinne wird es vielleicht nicht überflüssig sein, den Formeln der vorigen §§. noch eine andere Deutung zu geben.

Wir wissen, dass ein Element einer Kurve eine Integralcharakteristik bestimmt, zwei aufeinanderfolgende Elemente einen Integralstreifen, u. s. f. (§. 69). So bestimmt ein endliches Stück willkürlicher Kurve einen endlich breiten Streifen Integraloberfläche, der eingeschlossen ist zwischen den Integralcharakteristiken, welche vom ersten und vom letzten Element des willkürlichen Kurvenstücks bestimmt werden. Dieser Streifen ist unterbrochen von der Rückkehrkante und

man kann also sagen, dass das willkürliche Kurvenstück ein viereckiges Oberflächenstück bestimmt, eingeschlossen zwischen der ersten und letzten Charakteristik der Rückkehrkante und der willkürlichen Kurve selbst. (Die Rückkehrkante bestimmt dann allerdings die Fortsetzung der Oberfläche; darauf soll hier aber keine Rücksicht genommen werden). **Das Stück willkürlicher Kurve bestimmt mithin ein endliches Stück Rückkehrkante.**

Es erstrecke sich die willkürliche Kurve K vom Punkt $\mathfrak{P}$ zum Punkt $\mathfrak{P}'$ und das durch sie bestimmte Stück Rückkehrkante vom Pnnkt $\mathfrak{P}_1$ zum Punkt $\mathfrak{P}_1'$, so dass die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ auf der einen, die Punkte $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_1'$ auf der anderen Begrenzungscharakteristik liegen. Variirt man nun die Kurve K ein wenig, so dass sie werde $K+\delta K$, so wird die Gestalt der Integraloberfläche innerhalb des ganzen Gebiets $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'_1$ variiren und die Grenzen werden auch variiren. Wir können aber mit Hülfe der Formeln der vorigen §§. die Variation δK so einrichten, dass 1) die Begrenzungscharakteristiken und längs derselben die Grössen $x, y, z, p, q, r, s, t \ldots$ (bis zu einer beliebigen Ordnung der Differentialquotienten) von der Variation unberührt bleiben, 2) die variirte Rückkehrkante nach wie vor durch die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_1'$ gehe und dort mit der ursprünglichen einen Contact beliebiger Ordnung habe.

Man braucht nur statt der Kurve $(\gamma, \varkappa)$ die Kurve $(g+\delta g, h+\delta h)$ in die Formel IV einzuführen, und sie wird offenbar die Bedingung dafür, dass die variirte Integraloberfläche die ursprüngliche längs einer Charakteristik osculire. Man hat also in Formel IV $g+\delta g$ statt γ, $h+\delta h$ statt $\varkappa$ zu setzen, wobei dann unter Vernachlässigung der Terme zweiter Ordnung folgt:

$$\delta\left[(Ph)^{-2}\left\{GT+Xg+Yh+Z\right\}\right]=0, \qquad \text{V.}$$

wo die Variation δ sich nur auf die Grössen g, h, $\frac{dg}{dz}$, $\frac{dh}{dz}$ erstreckt, mithin die Grösse $T \equiv P\,(X+pZ)+Q\,(Y+qZ)$ unberührt lässt. Diese Variation führt natürlich auf Formel IV zurück, wenn man sie integrirt:

$$(Ph)^{-2}\left\{TG+Xg+Yh+Z\right\}=constans$$

und die Constante dadurch bestimmt, dass man das Integral auf eine andere Kurve $(\gamma, \varkappa)$ bezieht. Dann folgt:

$$(Ph)^{-2}\{TG+Xg+Yh+Z\}-(P\gamma)^{-2}\{T\Gamma+X\gamma+Y\varkappa+Z\}=0$$

und diese Gleichung ist mit IV identisch.

Wenn also die Variationen der Kurve K oder (g, h) in den Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ der Gleichung V genügen, so variiren die vier Eckpunkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1'$ des durch die Kurve K bestimmten Flächenstückes nicht, und die Rückkehrkanten tangiren sich in den Punkten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_1'$, u. s. f.

§. 75.

Ueber die willkürliche Funktion in der Integraloberfläche.

Ich verweise für die nachfolgende Erörterung auf die vollständige Construction einer polyedrischen Integraloberfläche, wie sie im §. 67 mitgetheilt worden ist, und werde annehmen, dass die Construction sich an eine vollkommen willkürliche Kurve anlehnt. Diese willkürliche Kurve bestimmt die Integraloberfläche bis auf die Längen ds, ds_1, ds_2 ..., die keinen Einfluss auf das Ergebniss des Uebergangs zur Grenze haben. Um analytisch scharf hervorzuheben, welche Elemente der Construction willkürlich sind, erinnere ich daran, dass in Bezug auf die Charakteristiken die Gleichungen:

$$a=\frac{P}{Pp+Qq}$$

$$b=\frac{Q}{Pp+Qq}$$

$$dp=\frac{X+pZ}{Pp+Qq}\,dz$$

$$dq=\frac{Y+qZ}{Pp+Qq}\,dz$$

stattfinden, so dass, wenn p und q für den Strahl ds gegeben sind, daraus a und b und da und db folgen, wodurch der Strahl ds_1 ebenfalls bestimmt ist. Für irgend eine andere Kurvenschaar auf der Integraloberfläche haben wir erstens die Gleichungen:

$$pd_1x+qd_1y=d_1z$$

$$Pd_1p+Qd_1q+Xd_1x+Yd_1y+Zd_1z=0.$$

Dazu können wir noch zwei Gleichungen:

$$d_1p=\lambda d_1z$$

$$d_1q=\lambda_1 d_1z$$

annehmen, und zwar die eine ganz nach Belieben, weil eine Projection der Kurvenschaar willkürlich ist. Damit die Kurvenschaar auf einer Integraloberfläche liegen könne, wird die andere nicht ganz willkürlich sein, sondern es wird eine Bedingungsgleichung zwischen den λ stattfinden. Um diese zu erhalten, eliminiren wir aus den Gleichungen (§. 60):

$$\begin{array}{lll} dx = adz & d_1x = ud_1z & dx + d_1x = d_2x \\ dy = bdz & d_1y = vd_1z & dy + d_1y = d_2y \\ dp = cdz & d_1p = wd_1z & dz + d_1z = d_2z \\ & & dp + d_1p = d_2p, \end{array}$$

von denen die erste Columne den Integralcharakteristiken, die zweite der in Rede stehenden Kurvenschaar, die dritte den Diagonalkurven beider angehören mag, die Differentiale mit den Zeichen d und d_1. Dies giebt ausser der Gleichung:

$$d_2z = pd_2x + qd_2y$$

die folgende:

$$d_2p = \frac{cv-bw}{av-bu} d_2x + \frac{aw-cu}{av-bu} d_2y.$$

Da also

$$\frac{cv-bw}{av-bu} = r, \quad \frac{aw-cu}{av-bu} = s$$

ist, so ist die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{cv-bu}{av-bu}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{aw-cu}{av-bu}\right).$$

Ferner folgt noch aus diesen beiden Relationen identisch:

$$ar + bs = c$$
$$ur + vs = w,$$

so dass, setzt man:

$$r = \frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial z} p + \frac{\partial\Theta}{\partial p} r$$
$$s = \frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial z} q + \frac{\partial\Theta}{\partial p} s$$

und bestimmt Θ aus der Gleichung $ar+bs=c$, die Gleichung $ur+vs=w$ eine Bestimmung für die Grössen u, v, w liefert, welche sonst nur noch die Gleichung $pu+qv=1$ zu erfüllen haben, daher, wie schon hervorgehoben, eine von ihnen ganz willkürlich bleibt.

Indem ich nun die allgemeinen Betrachtungen über die Gleichung $F=0$ und deren Integraloberflächen schliesse, be-

merke ich, dass ich von der mitgetheilten Interpretation Anwendung machen werde bei Behandlung der Gleichung:

$$\varphi(p, q) = \psi(x, y, z),$$

wo sie sich von Nutzen erweisen wird. Die Eigenthümlichkeit dieser Gleichung, welche ihre Behandlung erleichtert, ist, dass ihr Facettekegel eine Ebene ist und zwar die Tangentialebene an die Oberfläche: $\psi(x, y, z) =$ *constans*.

Es folgt hier noch als Anhang ein Beitrag zur Theorie der Legendre'schen Substitution, in welchem ich sie unter einem allgemeineren Gesichtspunkt, wie bisher geschehen, zu behandeln glaube.

Beitrag zur allgemeinen Theorie der LEGENDRE'schen Substitution.

§. 75.

Beispiel zur Substitution.

Sie besteht darin, dass statt der Variabeln x, y, z drei neue ξ, η, ζ eingeführt werden, die mit den alten in folgender Beziehung stehen:

$$\xi = p$$
$$\eta = q$$
$$\zeta = xp + yq - z$$

Hieraus folgt:

$$\pi \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = x$$
$$\varkappa \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = y$$

wenn man sich ζ als Funktion von ξ und η denkt.

Um ein Beispiel davon zu geben, wie diese Substitution zur Integration gewisser Differentialgleichungen benutzt werden kann, betrachten wir die Differentialgleichung, deren Integraloberflächen horizontale Facettelinien haben (§. 62, Bemerkung) nämlich:

$$xp + yq = \varphi(z, p, q).$$

Diese geht durch die LEGENDRE'sche Substitution über in:

$$\xi\pi + \eta\varkappa = \varphi(\zeta - \xi\pi - \eta\varkappa, \xi, \eta)$$

also, nach $\xi\pi + \eta\varkappa$ aufgelöst, in eine Gleichung von der Form:

$$\xi\pi + \eta\varkappa = \psi(\xi, \eta, \zeta),$$

deren Integration von derjenigen der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$d\eta = \frac{\eta}{\xi}\,d\xi$$

$$d\zeta = \frac{\psi}{\xi}\,d\xi$$

abhängt. Man hat folglich die Differentialgleichung:

$$\xi d\zeta = \psi\,(\xi,\ \alpha\xi,\ \zeta)\ d\xi$$

aufzulösen, in der α eine Constante bedeutet. Ihr Integral sei

$$\chi\ (\xi,\ \zeta,\ \alpha) = \beta$$

Dann ist:

$$\chi\left(\xi, \zeta, \frac{\eta}{\xi}\right) = \lambda\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

das Integral der Gleichung $\xi\pi + \eta x = \psi$, und man hat zur Bestimmung von p und q die Gleichungen:

$$xp + yq = \varphi\,(z,\ p,\ q)$$

$$\chi\left(p,\ xp+yq-z,\ \frac{p}{q}\right) = \lambda\left(\frac{q}{p}\right).$$

Die Werthe von p und q, welche aus diesen beiden Gleichungen folgen, müssen die Integrabilitätsbedingung erfüllen, und man kann daher das Integral der Gleichung $xp+yq=\varphi$ nicht durch Differentiation und Elimination aus demjenigen der Gleichung $\xi\pi+\eta x=\psi$ ableiten, sondern es bedarf noch, hat man einmal die zusammengehörigen Werthe von p und q gefunden, der Auflösung einer Differentialgleichung. Dass die beiden letzten Gleichungen die Bedingung der Integrabilität erfüllen, ist leicht zu zeigen. Differenzirt man beide nach x und nach y, so erhält man:

$$r\left(x - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) + s\left(y - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\right) + p\left(1 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0$$

$$s\left(x - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) + t\left(y - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\right) + q\left(1 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0$$

$$r\left[\frac{\partial\chi}{\partial\xi} + x\frac{\partial\chi}{\partial\zeta} - \frac{q}{p^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)\right] + s\left[y\frac{\partial\chi}{\partial\zeta} + \frac{1}{p}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)\right] = 0$$

$$s\left[\frac{\partial\chi}{\partial\xi} + x\frac{\partial\chi}{\partial\zeta} - \frac{q}{p^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)\right] + t\left[y\frac{\partial\chi}{\partial\zeta} + \frac{1}{p}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)\right] = 0,$$

wo ich der Kürze halber statt p, $xp+yq-z$, $\frac{p}{q}$ geschrieben habe: ξ, ζ, α. Aus diesen Gleichungen r und t eliminirt, und die so gewonnenen Werthe von s verglichen, folgt:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} + \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\,(xp+yq) = 0$$

eine Gleichung, die wegen der Differentialgleichung:

$$xp + yq \equiv \xi\pi + \eta\varkappa = \psi,$$

identisch stattfindet.

Zum gegenwärtigen Beispiel ist zu bemerken, dass die Integration sich leichter ausführen lässt, wie folgt: Man erinnere sich, dass die Gleichungen $F(p, q, xp+yq-z) = 0$ und $F(p, q) = 0$ beide den Abwickelbaren angehören, dass mithin die Gleichung $\chi\left(p, xp+yq-z, \frac{q}{p}\right) = \lambda\left(\frac{q}{p}\right)$ eine Gleichung von Abwickelbaren ist. Nimmt man nun neben der Gleichung: $xp+yq = \varphi(z, p, q)$ noch eine andere $\Theta(p, q) = 0$ an, und frägt, welche Form Θ haben müsse, damit die aus beiden Gleichungen sich ergebenden Werthe von p und q die Integrabilitätsbedingung erfüllen, so ergiebt sich:

$$\Theta \equiv q - \alpha p = 0,$$

wo α eine Constante. Durch die Integration der Gleichung $dz = pdx + qdy$ erhält man noch eine Constante β, so dass man auf diese Weise direkt zum vollständigen Integral der Gleichung $xp+yq = \varphi$ gelangt.

§. 76.

Geschichtliche Bemerkungen zur LEGENDRE'schen Substitution.

Die erste Spur dieser Substitutionsform finde ich in einer Abhandlung aus dem Jahre 1774 von LAGRANGE*), wo der Verfasser durch eigenthümliche Raisonnements Differentialgleichungen, die durch die LEGENDRE-AMPÈRE'schen Substitutionen direkt integrabel sind, auflösen lehrt. Die Substitution wurde zuerst 1787 von LEGENDRE als solche bekannt gemacht (S. 49 Anm.). MONGE schenkte dieser analytischen Form ebenfalls Aufmerksamkeit. In dem Verzeichniss seiner Abhandlungen findet sich eine**) aufgeführt, welche der geometrischen Be-

*) *Mémoire sur les Intégrales particulières des Equations differentielles* (*Mém. de Berlin* 1774). Dies ist eine der tiefsinnigsten und zugleich graciösesten Abhandlungen, welche je geschrieben worden. Auf anmuthigen, nicht auf dornenvollen Pfaden führt sie den Leser zur Erkenntniss der überraschendsten Wahrheiten.

**) *Mémoire sur les Surfaces réciproques.* MONGE definirt diese Oberflächen im Titel der Abhandlung: Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes einer gegebenen Oberfläche, so ist deren Reciproke der Ort der Punkte ξ, η, ζ, die mit den x, y, z durch die Gleichungen: $\xi = p$, $\eta = q$, $\zeta = xp+yq-z$ verbunden sind.

deutung der fraglichen Substitution gewidmet ist. Nach CHASLES*) würde diese Abhandlung MONGE's zu den Memoiren des Instituts vom Jahre 1808 gehören, wäre aber nicht im Druck erschienen. In der c. Note, welche CHASLES der Theorie der reciproken Oberflächen widmet, drückt er sein Bedauern darüber aus, dass die MONGE'sche Abhandlung nicht bekannt geworden ist. Ich kann dem nur beipflichten, da in der That der Zusammenhang des Integrals der ursprünglichen und der transformirten Differentialgleichung im Falle der verallgemeinerten Substitution ein complicirter ist, und hier eine gute geometrische Theorie sehr nützlich sein würde.

CHASLES fügt übrigens selbst allgemeinere Formen der LEGENDRE'schen Substitution seiner c. Note bei, die folgende z. B.:

$$\xi = \frac{A_3 (px+qy-z) + A_2 - A_1 q - Ap}{D_3 (px+qy-z) + D_2 - D_1 q - Dp}.$$

Die Werthe von η und ζ folgen aus dem vorstehenden von ξ, wenn man statt A, A_1, A_2, A_3 respective B, B_1, B_2, B_3 und C, C_1, C_2, C_3 schreibt. Aus den Werthen von ξ, η, ζ erhält man dann leicht, wie weiter unten gezeigt werden wird, diejenigen von $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} \equiv \pi$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \equiv \varkappa$.

§. 77.

Eigenthümlichkeit der LEGENDRE'schen Substitution.

Wir nehmen an, die drei Variabeln ξ, η, ζ seien mit den Variabeln x, y, z verbunden durch Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}\xi &= \varphi\,(x, y, z, p, q)\\ \eta &= \varphi_1(x, y, z, p, q)\\ \zeta &= \varphi_2(x, y, z, p, q).\end{aligned}$$

Es ist dabei z als Funktion von x und y gedacht, aber als eine durchaus unbestimmte; und ebenso sehen wir ζ als eine Funktion von ξ und η an und wollen die Ausdrücke für die Differentialquotienten dieser Funktion: $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} \equiv \pi$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \equiv \varkappa$ aufsuchen.

*) CHASLES, Geschichte der Geometrie, übers. von SOHNKE. S. 405, Note XXX.

Der Kürze halber bezeichnen wir den Differentialquotienten einer Funktion φ_n nach irgend einer Variabeln i mit I_n, und ausserdem setzen wir:

$$X'_n \equiv X_n + pZ_n$$
$$Y'_n \equiv Y_n + qZ_n$$

Unter Benutzung dieser Bezeichnungen erhält man durch Differentiation der Gleichungen $\xi=\varphi$, $\eta=\varphi_1$, $\zeta=\varphi_2$ nach ξ und η folgende Gleichungen:

$$1 = (X' + Pr + Qs)\frac{\partial x}{\partial \xi} + (Y' + Ps + Qt)\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$0 = (X' + Pr + Qs)\frac{\partial x}{\partial \eta} + (Y' + Ps + Qt)\frac{\partial y}{\partial \eta}$$
$$0 = (X_1' + P_1 r + Q_1 s)\frac{\partial x}{\partial \xi} + (Y_1' + P_1 s + Q_1 t)\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$1 = (X_1' + P_1 r + Q_1 s)\frac{\partial x}{\partial \eta} + (Y_1' + P_1 s + Q_1 t)\frac{\partial y}{\partial \eta}$$
$$\pi = (X_2' + P_2 r + Q_2 s)\frac{\partial x}{\partial \xi} + (Y_2' + P_2 s + Q_2 t)\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\varkappa = (X_2' + P_2 r + Q_2 s)\frac{\partial x}{\partial \eta} + (Y_2' + P_2 r + Q_2 t)\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

und durch Elimination von $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ folgen zwei Gleichungen von der Form:

$$\pi\,(ab_1) + (a_1 b_2) = 0$$
$$\varkappa\,(ab_1) - (ab_2) = 0$$

wo allgemein:

$$(a_n b_m) = (X'_n Y'_m) + r\,(P_n Y'_m) + s\,[(X'_n P_m) + (Q_n Y'_m)] + \\ + t\,(X'_n Q_m) + (rt - s^2)(P_n Q_m).$$

Hier hat die eckige Klammer die gewöhnliche Bedeutung, die runde dagegen bedeutet wie bisher eine zweigliedrige Determinante, deren zweites Glied leicht zu ergänzen und daher der Raumersparniss wegen nicht hingeschrieben ist. Es werden also π und $\varkappa$ Ausdrücke sein von der Form:

$$\pi = \frac{\alpha + \alpha_1 r + \alpha_2 s + \alpha_3 t + \alpha_4 (rt - s^2)}{\gamma + \gamma_1 r + \gamma_2 s + \gamma_3 t + \gamma_4 (rt - s^2)}$$
$$\varkappa = \frac{\beta + \beta_1 r + \beta_2 s + \beta_3 t + \beta_4 (rt - s^2)}{\gamma + \gamma_1 r + \gamma_2 s + \gamma_3 t + \gamma_4 (rt - s^2)}$$

in denen man die Werthe der α, β, γ leicht aus dem allgemeinen Ausdruck für $(a_n\, b_m)$ folgern kann.

Die Eigenthümlichkeit der Substitution von LEGENDRE und der ihr ähnlichen von AMPÈRE und CHASLES ist, dass die Werthe

von π und $\varkappa$ die Grössen r, s, t nicht enthalten, wiewohl p und q in die Ausdrücke für ξ, η, ζ eingehen. Bei diesen Substitutionen hat man also:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi\ (x, y, z, p, q) \\ \eta &= \varphi_1 (x, y, z, p, q) \\ \zeta &= \varphi_2 (x, y, z, p, q) \\ \pi &= \psi\ (x, y, z, p, q) \\ \varkappa &= \psi_1 (x, y, z, p, q) \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Aber die Funktionen φ und ψ müssen so beschaffen sein, dass man aus den eben verzeichneten fünf Gleichungen x, y, z, p, q nicht eliminiren kann. Denn sonst würde die Abhängigkeit des ζ von ξ und η nicht eine beliebige sein können, man würde nicht neben den vorstehenden Substitutionen noch irgend eine Gleichung zwischen x, y, z, p, q, mithin zwischen ξ, η, ζ, π, $\varkappa$ annehmen dürfen.

§. 78.

Allgemeine Form der LEGENDRE'schen und AMPÈRE'schen Substitution.

Bezeichnet man die Operationen, welche irgend eine Funktion $f(x, y, z)$ in $\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}$ verwandeln, mit D_x und D_y, und setzt ausserdem:

$$\begin{aligned} \Delta\ &\equiv z - xp - yq \\ \Delta_1 &\equiv z - xp \\ \Delta_2 &\equiv z - yq, \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} D_x\Delta\ &= 0, \quad D_y\Delta\ = 0 \\ D_x\Delta_1 &= 0, \quad D_y\Delta_1 = p \\ D_x\Delta_2 &= q, \quad D_y\Delta_2 = 0. \end{aligned}$$

Wird nun zunächst angenommen:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi\ (p, q, \Delta) \\ \eta &= \varphi_1 (p, q, \Delta) \\ \zeta &= \varphi_2 (p, q, \Delta), \end{aligned}$$

wo die φ's übrigens beliebige Funktionen bezeichnen, so hat man:

$$X'_n = 0, \quad Y'_n = 0.$$

Mithin reduciren sich die Werthe von π und $\varkappa$, wie folgt:

$$\pi = \frac{\alpha_4}{\gamma_4}, \quad \varkappa = \frac{\beta_4}{\gamma_4}.$$

Dies giebt ausgerechnet:

$$\pi = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q}\right) + x\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\frac{\partial\varphi_2}{\partial \Delta}\right) - y\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\frac{\partial\varphi_2}{\partial \Delta}\right)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\right) + x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\varphi_1}{\partial \Delta}\right) - y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial \Delta}\right)}$$

$$\varkappa = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q}\right) + x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\varphi_2}{\partial \Delta}\right) - y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial \Delta}\right)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\right) + x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\varphi_1}{\partial \Delta}\right) - y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial \Delta}\right)}.$$

Die eben aufgestellten Werthe von ξ, η, ζ, π, $\varkappa$ geben die allgemeinste Form der LEGENDRE'schen Substitution.

Die von AMPÈRE mitgetheilten Substitutionen sind folgende:

I	II
$\xi = p$	$\xi = x$
$\eta = y$	$\eta = p$
$\zeta = \Delta_1$	$\zeta = \Delta_2$

Verallgemeinern wir Substitution I, indem wir setzen:

$$\xi = \varphi\,(y, p, \Delta_1)$$
$$\eta = \varphi_1(y, p, \Delta_1)$$
$$\zeta = \varphi_2(y, p, \Delta_1),$$

wo die φ's wieder beliebige Funktionen vorstellen, so sehen wir, dass, diese Werthe von ξ, η, ζ zu Grunde gelegt, in den Ausdrücken für π und $\varkappa$ alle Coëfficienten α, β, γ mit Ausnahme derer mit dem Index 1 verschwinden. Es ist nämlich:

$$X'_n = 0, \quad Y'_n = \frac{\partial\varphi_n}{\partial y} + q\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial\Delta_1}, \quad P_n = \frac{\partial\varphi_n}{\partial p} - x\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial\Delta_1}, \quad Q_n = 0.$$

Wegen $Q_n = 0$ verschwinden die Coëfficienten mit dem Index 4 und der Theil $(Q_n\,Y'_m)$ der Coëfficienten von s; und wegen $X'_n = 0$ folgt dann:

$$\pi = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \quad \varkappa = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

oder ausgerechnet:

$$\pi = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial p}\right) - q\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\frac{\partial\varphi_2}{\partial \Delta_1}\right) - y\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial \Delta_1}\right)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\right) - q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial \Delta_1}\right) - y\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial \Delta_1}\right)}$$

$$\varkappa = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial p}\right) - q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_2}{\partial \Delta_1}\right) - y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial \Delta_1}\right)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\right) - q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial \Delta_1}\right) - y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial \Delta_1}\right)}.$$

Es ist überflüssig, die Formeln für die AMPÈRE'sche Substitution II hinzuschreiben, da sie sich aus denen für die Substitution I durch Vertauschung von p mit x, y mit q ergeben.

§. 79.

Bedingung dafür, dass π und $\varkappa$ von r, s, t unabhängig seien.

Um zu untersuchen, welches die allgemeinste Bedingung sei, der die Funktionen ξ, η, ζ von x, y, z, p, q zu genügen haben, damit π und $\varkappa$ von r, s, t frei seien, wird man folgenden Weg einschlagen müssen.

Rein algebraisch werden zunächst π und $\varkappa$ von r, s, t unabhängig durch das Verschwinden aller Determinanten von der Form:

$$(\alpha_n \gamma_m), \ (\beta_n \gamma_m).$$

Schreibt man für diese Determinanten, die sich auf acht reduciren lassen, die expliciten Ausdrücke hin, so sieht man, dass sie alle verschwinden, wenn

$$\left.\begin{aligned} P(X_1'Y_2') - P_1(X'Y_2') + P_2(X'Y_1') &= 0 \\ Q(X_1'Y_2') - Q_1(X'Y_2') + Q_2(X'Y_1') &= 0 \end{aligned}\right\} \text{II}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} X'(P_1Q_2) - X_1'(PQ_2) + X_2'(PQ_1) &= 0 \\ Y'(P_1Q_2) - Y_1'(PQ_2) + Y_2'(PQ_1) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{II}'$$

gesetzt wird.

Dies sind Bedingungsgleichungen allgemeiner Natur für die LEGENDRE'sche Substitution, die eine interessante Transformation zulassen, welche ich noch mittheilen will. Sieht man nämlich die Variabele ζ z. B. nicht als Funktion von x, y, z, p, q, sondern, was erlaubt ist, als eine Funktion φ_2 von x, y, z, ξ, η an, und setzt:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \equiv X_2''$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \equiv Y_2''$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \equiv \Xi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \equiv H$$

so folgt:

$$X_2' = X_2'' + \Xi X' + H X_1'$$
$$Y_2' = Y_2'' + \Xi Y' + H Y'_1$$
$$P_2 = \Xi P + H P_1$$
$$Q_2 = \Xi Q + H Q_1.$$

Hieraus ergiebt sich zunächst:

$$\pi = \frac{\alpha_4}{\gamma_4} = \Xi, \quad \varkappa = \frac{\beta_4}{\gamma_4} = H.$$

Geht man mit den vorstehenden Werthen von X_2', Y_2', P_2, Q_2 in die Differentialgleichungen II hinein, so liefert die Reduction die Gleichungen:

$$P(X_1' Y_2'') - P_1 (X' Y_2'') = 0$$
$$Q(X_1' Y_2'') - Q_1 (X' Y_2'') = 0,$$

aus denen folgt:

$$(PQ_1)(X_1' Y_2'') = 0$$
$$(PQ_1)(X' \; Y_2'') = 0.$$

Nimmt man an, (PQ_1) sei nicht gleich Null, so folgt aus $(X_1'' Y_2'') = 0$, $(X' Y_2'') = 0$:

$$(X' Y_1') X_2'' = 0$$
$$(X' Y_1') Y_2'' = 0.$$

Führt man ferner obige Werthe von X_2', X_2', P_2, Q_2 in die Gleichungen II' ein, so erhält man sofort:

$$(PQ_1) X_2'' = 0$$
$$(PQ_1) Y_2'' = 0.$$

Unter der Annahme, (PQ_1) sei nicht gleich Null, verschwinden also X_2'' und Y_2'', und man findet als Resultat dieser Transformation:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \equiv X_2'' = 0$$
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \equiv Y_2'' = 0$$
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \equiv \Xi = \pi$$
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \equiv H = \varkappa.$$

Aus den Gleichungen $X_2'' = 0$, $Y_2'' = 0$ erhält man übrigens die Differentialgleichungen II' sehr leicht zurück.

§. 80.

Wie man diese Substitution benutzen kann, um leicht auflösbare Differentialgleichungen zu erhalten.

Es seien Gleichungen von der Form:

$$F(\pi) = 0\,;\ F(\pi, \varkappa) = 0$$

$$F(\pi, \varkappa, \xi \text{ oder } \eta \text{ oder } \zeta) = 0$$

$$F(\pi, \varkappa, \xi, \eta) = 0\,;\ F(\pi, \varkappa, \zeta, \xi \text{ oder } \eta) = 0$$

$$F(\pi, \varkappa, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

vorgelegt, so erhält man das Integral der beiden ersten algebraisch aus den Differentialgleichungen, das der dritten durch Quadratur, das der vierten und fünften durch Auflösung eines Systems von zwei, das der sechsten durch Auflösung eines Systems von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Es sei nun beispielsweise

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

das Integral der Gleichung $F(\pi, \varkappa) = 0$, so werden auch die Gleichungen:

$$f(\varphi, \varphi_1, \varphi_2) = 0$$

$$F\left(\frac{(P_1 Q_2)}{(P Q_1)}, \frac{(P Q_2)}{(P Q_1)}\right) = 0$$

solche Werthe von p und q liefern, welche der Bedingung der Integrabilität genügen. Die zusammengehörigen Werthe von p und q erhält man so ganz leicht, während sie aus der Differentialgleichung $F = 0$ direkt nur durch Auflösung eines Systems von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zu ermitteln wären.

So kann man denn Differentialgleichungen aufstellen, bei denen die Auffindung der zusammengehörigen Werthe von p, q algebraisch möglich ist, oder von Quadraturen, oder von der Auflösung von mehr oder weniger gewöhnlichen Differentialgleichungen abhängt, jenachdem man von einer der eingangs dieses §. zusammengestellten Formen ausgeht.

Bildet man ferner die Ausdrücke von

$$\varrho = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2},\quad \sigma = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta},\quad \tau = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$$

in x, y, z, p, q, r, s, t; nimmt irgend eine integrabele Differentialgleichung $F(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa, \varrho, \sigma, \tau) = 0$ mit ihrem Integral $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ an, so erhält man durch Einsetzen in beide Gleichungen der Variabeln x, y, z, p, q, r, s, t eine andere

partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit ihrem Integral, wenn man zur Elimination von p und q noch die Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial \xi} + \pi \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \eta} + \varkappa \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0$ benutzt.

Integrabele partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann man übrigens zusammensetzen, wenn man den Funktionen φ, φ_1, φ_2 ganz beliebige Formen giebt, wobei dann π und $\varkappa$ von r, s, t abhängen. Bildet man eine Gleichung $F(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa) = 0$, so erhält man durch Integration dieser Gleichung ein erstes Integral mit einer willkürlichen Funktion derjenigen Differentialgleichung, welche durch Einsetzen der Variabeln x, y, z, p, q, r, s, t in die Gleichung $F = 0$ folgt. Diese Integration ist insofern von Interesse, als die so erhaltene partielle zweiter Ordnung nicht mit Hülfe der MONGE–AMPÈRE'schen Methode wird aufgelöst werden können, sobald die Differentialgleichung $F(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa) = 0$ nicht linear ist. Man erhält also ein erstes Integral, aus zwei Gleichungen bestehend, von einer Form, die ihm LAGRANGE in der §. 76 citirten Abhandlung aus theoretischen Gründen vermuthete.

§. 81.

Bemerkung über die Reciprocität der in Rede stehenden Substitution.

Diese besteht darin, dass die Gleichungen $\xi = \varphi$, etc. nach x, y, z, p, q aufgelöst, Gleichungen von der Form: $x = \chi(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa)$, etc. liefern, aus deren drei ersten für p und q Werthe folgen, welche den nämlichen Funktionalausdruck haben, wie die aus den Funktionen φ, φ_1, φ_2 gefolgerten Werthe von π und $\varkappa$. Allgemein müssen die Funktionen x, y, z von ξ, η, ζ, π, $\varkappa$ den Differentialgleichungen II genügen, wenn die Funktionen ξ, η, ζ von x, y, z, p, q es thun.

Die vollkommene Reciprocität, welche man der LEGENDRE'schen und der CHASLES'schen Substitution ertheilen kann (siehe die §. 76 citirte Note von CHASLES), besteht darin, dass die Funktionen χ mit den Funktionen φ identisch werden, und beschränkt natürlich die Form, welche den letzteren gegeben werden kann, in hohem Grade.

Fünfter Abschnitt.

Ueber die Grenzbedingungen bei den partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln, und das Gebiet, innerhalb dessen ihre Integrale durch die willkürlichen Funktionen bestimmt sind.

Zur Ergänzung der Betrachtungen des zweiten Abschnitts wird hier der im Titel bezeichnete Gegenstand in allgemeiner Weise der Erörterung unterzogen werden. Um diese erste Mittheilung meiner Untersuchungen, die schon zu lang ist, nicht über Gebühr auszudehnen, werde ich bei dieser Betrachtung möglichst summarisch verfahren, mir die genauere Untersuchung für die Behandlung besonderer Differentialgleichungen vorbehaltend.

Ich werde in diesem Abschnitte zunächst die Grenzbedingungen klassificiren, um die Untersuchung einschränken zu können. Dann werde ich auf Grund der Potenzentwickelung des Integrals gewisse Grenzbedingungen als ungenügend kennzeichnen. Und schliesslich wende ich mich der Frage zu, wie weit durch ein endlich langes Stück genügend bestimmter Grenze die Integraloberfläche der partiellen Differentialgleichungen bestimmt werde, mit andern Worten: wenn die Begrenzung der Integraloberfläche nicht vollständig gegeben ist, aber in dem gegebenen Theil die erforderlichen Bedingungen erfüllt sind, um einen endlichen Theil der Integraloberfläche zu bestimmen, welcher Art die »spontanen Grenzen« seien,

d. i. die Grenzen die sich in Folge der Natur der partiellen Differentialgleichungen von selbst herstellen. In den §§. 17, 18, 19 ist das Material zu dieser Untersuchung bereits in Bezug auf eine besondere Gattung von Differentialgleichungen geliefert worden.

XIV. Ueber die Grenzbedingungen im Allgemeinen.

§. 82.

Das Integral einer partiellen Differentialgleichung ist bestimmt, wenn es noch einer andern solchen zu genügen hat.

Wenn eine Funktion einer partiellen Differentialgleichung genügen soll, so ist sie dadurch nicht völlig bestimmt, sondern es müssen zu ihrer Bestimmung noch andere Bedingungen gegeben sein, mit denen wir uns nun beschäftigen wollen.

Von der partiellen Differentialgleichung wird, hier wie früher, angenommen, dass sie eine Funktion z von zwei Argumenten x und y definirt. Alle drei Variabeln sind reell und können demnach ohne Weiteres durch räumliche Coordinaten dargestellt werden.

Die Differentialgleichung zwischen x, y, z und den Differentialquotienten irgend einer Ordnung von z wird durchgehend mit $F=0$ bezeichnet werden. Ausserdem bezeichnen wir mit I den Differentialquotienten der Funktion F nach einer Variabelen i; so dass $X \equiv \frac{\partial F}{\partial x}$ etc. sei. Wir bezeichnen ferner mit X' und Y' die nach x und y genommenen Differentialquotienten von F, wenn bei der Differentiation die höchsten in F vorkommenden Differentialquotienten wie Constanten behandelt sind. Enthält F nur x, y, z, p, q, so ist demnach:

$$X' \equiv X + pZ, \quad Y' \equiv Y + qZ.$$

Enthält F ausserdem noch r, s, t, so ist:

$$X' \equiv X + pZ + rP + sQ, \quad Y' \equiv Y + qZ + sP + tQ$$

u. s. f.

Die Bedingungen, welchen neben der gegebenen Differentialgleichung die Funktion z zu genügen hat, können nun für das ganze Gebiet der x und y Werthe, in dem die Funktion z zu bestimmen ist, gegeben sein, oder nur für eine oder mehrere Folgen von Punkten, d. i. Linien in diesem Gebiete. Die

erste Klasse von Bedingungen wollen wir mit unten stehender Bemerkung sofort von der Betrachtung ausschliessen, denn sie kommt nur darauf hinaus, dass die Funktion z zwei partiellen Differentialgleichungen statt einer zu genügen hat. Möglich ist dies stets, denn die zweite Differentialgleichung braucht in diesem Falle nur eine andere Relation zwischen der Integralgleichung und den aus der Integralgleichung durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen zu sein, als die gegebene Differentialgleichung. Zwischen den beiden Differentialgleichungen, die eine gemeinsame Lösung haben, existiren Beziehungen allgemeiner Natur, deren hier einige verzeichnet sind, unter der Annahme, dass beide Differentialgleichungen von derselben Ordnung seien.

I. Es seien

$$F=0 \text{ und } F_1=0$$

zwei Differentialgleichungen $n$ter Ordnung. Bildet man alle Ableitungen von $F=0$, $F_1=0$ bis zur $m$ten Ordnung, so erhält man ausser $F=0$, $F_1=0$ im Ganzen $m\,(m+3)$ Gleichungen. In diesen kommen ausser den in $F=0$, $F_1=0$ enthaltenen $n$ten Differentialquotienten $\frac{m}{2}\left(\frac{m+3}{2}+n\right)$ neue (bis zur $m$ten Ordnung) vor. Eliminirt man die letzteren, so mögen l Gleichungen folgen. Es ist also:

$$m\left(\frac{m+3}{2}-n\right)=l.$$

Für die successiven Werthe von n hat man nun die kleinsten Werthe von l und die zugehörigen von m zu suchen.

Für $n=1$	ist	$m=1$,	$l=1$
$n=2$	,,	$m=2$,	$l=1$
$n=3$	,,	$m=4$,	$l=2$
. . . . .	. . .	. . . . .	. . .
$n=n$	,,	$m=2(n-1)$,	$l=n-1$.

Man erhält demnach nur für die beiden ersten Ordnungen eine Eliminationsgleichung. Sind $F=0$, $F_1=0$ erster Ordnung, so ist es die bekannte lineäre Differentialgleichung (§. 15) zwischen den Funktionen F und F_1 von x, y, z, p, q. Sind $F=0$ und $F_1=0$ zweiter Ordnung, so ist die Differentialgleichung zwischen beiden zweiter Ordnung. Sind endlich $F=0$, $F_1=0$ dritter oder höherer Ordnung, so ist die kleinste Zahl der

Eliminationsgleichungen $n-1$, wenn n die Ordnung von $F=0$, $F_1=0$ bezeichnet. Es müssen alsdann die Funktionen F und F_1 gleichzeitig $n-1$ Gleichungen erfüllen. Nimmt man eine, z. B. F als beliebig und gegeben an, so ist F_1 eine gleichzeitige Lösung von den $n-1$ Eliminationsgleichungen.

II. Fragt man, wie zwei Gleichungen zweiter Ordnung $F=0$, $F_1=0$ beschaffen sein müssen, damit man nach einmaliger Differentiation beider Gleichungen nach x und nach y die vier dritten Differentialquotienten von z eliminiren könne, so findet man, dass alsdann F und F_1 die Gleichungen:

$$(RS_1)(ST_1)-(RT_1)^2=0$$
$$(X'R_1)(ST_1)+(Y'T_1)(RT_1)=0$$

erfüllen müssen.

III. Es verdient noch bemerkt zu werden, dass, wenn zwei partielle Differentialgleichungen $F=0$, $F_1=0$ eine gemeinschaftliche Lösung haben, diese häufig durch Auflösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zu finden ist.

Sind die beiden Differentialgleichungen $F=0$, $F_1=0$ erster Ordnung, so liegt dies auf der Hand. Sind sie zweiter Ordnung, so substituirt man in:

$$dr=\mathfrak{a}dx+\mathfrak{b}dy$$
$$ds=\mathfrak{b}dx+\mathfrak{c}dy$$
$$dt=\mathfrak{c}dx+\mathfrak{d}dy$$

aus den Gleichungen:

$$R\mathfrak{a}+S\mathfrak{b}+T\mathfrak{c}+X'=0$$
$$R\mathfrak{b}+S\mathfrak{c}+T\mathfrak{d}+Y'=0$$
$$R_1\mathfrak{a}+S_1\mathfrak{b}+T_1\mathfrak{c}+X_1'=0$$
$$R_1\mathfrak{b}+S_1\mathfrak{c}+T_1\mathfrak{d}+Y_1'=0$$

die Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in x, y, z, p, q, r, s, t, und hat zwischen diesen Grössen ausserdem noch die Differentialgleichungen:

$$dz=pdx+qdy$$
$$dp=rdx+sdy$$
$$dq=sdx+tdy.$$

Da diese totalen Differentialgleichungen einer beliebigen Kurve auf der Integraloberfläche entsprechen, so ist hier die Methode des §. 1 anwendbar, und man hat für y und dy z. B. ax und adx einzuführen, wodurch die Zahl der Differentiale sich auf die richtige reducirt. Die sich ergebenden sechs gewöhnlichen

Differentialgleichungen haben dann sechs Integrale von der Form:

$$c = \psi(a, x, z, p, q, r, s, t).$$

Wir ertheilen ihnen zunächst die Form:

$$\psi(a, 0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0) = \psi(a, x, z, p, q, r, s, t),$$

wo die Variabeln mit dem Index 0 sich auf den Punkt $x = 0$, $y = 0$ beziehen. Für a setzen wir darauf $\frac{y}{x}$ zurück und eliminiren aus den sechs Integralen die Grössen p, q, r, s, t. Die Resultirende ist die gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen $F = 0$, $F_1 = 0$.*)

§. 83.

Ein und mehrläufige Grenzbedingungen. Definition und Vorbemerkungen.

Damit sind gemeint neben der Differentialgleichung bestehende und zur Bestimmung ihres Integrals erforderliche und ausreichende Relationen zwischen x, y, z und den partiellen Differentialquotienten von z, welche nur gelten längs einer Kurve (einläufige Grenzbedingungen) oder längs zwei oder mehreren Kurven (zwei- oder mehrläufige Grenzbedingungen). Die Differentialgleichungen erster Ordnung lassen nur einläufige Grenzbedingungen zu (§. 85). Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung lassen ein- und zweiläufige, und, wie man aus physikalischen Theorien schliessen kann, auch mehrläufige Grenzbedingungen zu. Was die einläufigen Grenzbedingungen betrifft, so können sie zwar auch verschiedene Gestalten annehmen. Von grösster Mannigfaltigkeit aber sind die mehrläufigen Grenzbedingungen. Ich bemerke gleich, dass die allgemeine Theorie der letzteren noch in der Wiege ist. Wir wissen darüber wenig mehr, als was uns die Behandlung einzelner physikalischer Probleme gelehrt hat. Wie §. 56 angegeben wurde, gehört die Bedingung, dass die Integraloberfläche durch eine geschlossene Kurve ohne Stetigkeitsunterbrechung gehen solle, zu den zweiläufigen Grenzbedingungen. Dies lehrt schon die Ueberlegung. Aber man kann sich auch durch Beispiele davon überzeugen. Genau derselbe

*) Dieselbe Betrachtung führt auf die gemeinschaftliche Lösung von $F = 0$, $F_1 = 0$, sobald nur eine dieser Gleichungen zweiter Ordnung ist.

Calcül, durch welchen man ein allgemeines Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung so bestimmt, dass die Integraloberfläche durch zwei Kurven geht, dient dazu, um die Oberfläche durch eine geschlossene oder durch eine in geeigneter Weise in sich zurücklaufende Kurve (z. B. eine Spirale) zu legen, und man sieht dann, dass die Integraloberfläche vollkommen bestimmt ist. Um noch ein Beispiel von mehrläufigen Grenzbedingungen anzuführen, erinnere ich an die Differentialgleichung der Capillarität. Ich habe in meiner Dissertation*) die sich aus der Theorie ergebenden Grenzbedingungen möglichst vollständig zusammengestellt. Gerade hierin scheint mir das mathematische Interesse der Capillaritätstheorie zu liegen, dass sie uns mit so mannigfaltigen zweiläufigen Grenzbedingungen bekannt macht. So ist z. B. die Integraloberfläche bis auf eine Constante dadurch bestimmt, dass sie durch zwei gegebene nicht geschlossene, oder eine geschlossene Oberfläche mit gegebener constanter Neigung hindurchgehen soll; ferner dadurch, dass mehrere Integraloberflächen sich in einer Kurve unter gegebenen Winkel treffen, und daneben eine gegebene Oberfläche unter gegebenen Winkel treffen u. s. f. In dieser Theorie erhält man die partielle Differentialgleichung und die zur Bestimmung ihres Integrals ausreichenden Grenzbedingungen durch Variation einer Summe von Doppelintegralen. Es ist vielleicht überhaupt das erfolgreichste Mittel, um die mehrläufigen Grenzbedingungen zu studieren**), Summen verschiedener Doppelintegrale zwischen verschiedenen Grenzen der Variation zu unterwerfen. Eine neue Art Grenzbedingungen tritt hierbei auf, die darin besteht, dass die Integraloberflächen zweier verschiedener Differentialgleichungen in der Durchschnittslinie eine simultane Bedingung zu erfüllen haben. Die mehrläufigen Grenzbedingungen sind aber einerseits zu der Construction von Integraloberflächen, welche wir zum Gegenstand unserer bisherigen Betrachtungen gemacht haben, nicht geeignet, und dann habe ich Grund zu vermuthen, dass, die Einführung einläufiger Grenzbedingungen einmal allgemein ermöglicht, sich daraus die Mittel ergeben werden, mit mehrläu-

*) *De aequilibrio fluidorum.*

**) Weil man hierbei die Bürgschaft dafür hat, dass die Grenzbedingungen genügend sind, aber auch nichts Ueberflüssiges enthalten.

figen Grenzbedingungen erfolgreich zu operiren. Ich werde mich deshalb im Folgenden thunlichst auf einläufige Grenzbedingungen beschränken.

XV. Auflösung der partiellen Differentialgleichungen durch Potenzreihen.

§. 84.

Potenzentwickelung des Integrals der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Diese Reihenentwickelung soll uns dazu dienen, über die Form der Grenzbedingungen genauere Auskunft zu erhalten. Ebenso wie man die gesuchte Funktion y von x aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$ nach dem Taylor'schen Satze in die Reihe:

$$\eta - y = g_1(\xi - x) + g_2(\xi - x)^2 + \ldots.$$

entwickelt erhalten kann, wo ξ und η die laufenden Coordinaten, x und y diejenigen eines festen Punktes einer Integralkurve der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$ bedeuten, und

$$g_1 = \varphi(x, y)$$
$$g_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
etc.

ist: ebenso kann man das Integral einer partiellen Differentialgleichung nach dem Taylor'schen Satze in Reihenform darstellen. Setzen wir $\xi - x = \Delta x$, $\eta - y = \Delta y$, $\zeta - z = \Delta z$, so ist:

$$\Delta z = p\Delta x + q\Delta y + \frac{1}{2}\left\{r\Delta x^2 + 2s\Delta x\Delta y + t\Delta y^2\right\} + \text{etc.}$$

und die Aufgabe reducirt sich darauf, die Coëfficienten p, q, etc. durch bekannte Grössen an der Grenze auszudrücken.

Es sei zunächst die Differentialgleichung erster Ordnung $F=0$ vorgelegt. Wir nehmen an, die Integraloberfläche solle durch die Kurve:

$$x = \psi(z)$$
$$y = \psi_1(z)$$

gehen. Bezeichnen wir mit u und v die Neigungstangenten der Elemente dieser Kurve, so ist in ihr:

$$pu + qv = 1.$$

Mit Hülfe der Gleichungen $F=0$, $x=\psi$, $y=\psi_1$, $pu+qv=1$ kann man x, y, p, q bestimmen. Es kommt also nur darauf an, die folgenden Coëfficienten zu ermitteln. Durch Differentiation von $F=0$ und $pu+qv=1$ folgt:

$$\begin{aligned} Pr+Qs+X' &= 0 \\ Ps+Qt+Y' &= 0 \\ ru^2+2suv+tv^2+U &= 0, \end{aligned}$$

wo $U=p\frac{du}{dz}+q\frac{dv}{dz}$. Aus vorstehenden Gleichungen ergiebt sich als Glied zweiten Grades der Reihe für Δz:

$$-\frac{1}{2\mathfrak{R}_1^2}\left\{\Delta x^2\left[U-\frac{v}{Q}\left(uX'+vY'-\frac{X'}{Q}\mathfrak{R}_1\right)\right]-\Delta x\Delta y\left[U-\frac{u^2X'}{P}-\frac{v^2Y'}{Q}\right]\right.$$
$$\left.+\Delta y^2\left[U-\frac{u}{P}\left(uX'+vY'+\frac{Y'}{P}\mathfrak{R}_1\right)\right]\right\},$$

wo $\mathfrak{R}_1\equiv P-Q\frac{u}{v}$. Setzen wir:

$$\overset{n}{\underset{m}{z}}=\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-m}\partial y^m},$$

so folgt, dass man zur Bestimmung der $n$ten Differentialquotienten von z erstens n Gleichungen von der Form:

$$P\overset{n}{\underset{m}{z}}+Q\overset{n}{\underset{m-1}{z}}+F_m^{(n-1)}=0$$

und ausserdem die Gleichung:

$$u^n\overset{n}{\underset{0}{z}}+nu^{n-1}v\overset{n}{\underset{1}{z}}+\ldots+nuv^{n-1}\overset{n}{\underset{n-1}{z}}+v^n\overset{n}{\underset{n}{z}}+U^{(n)}=0$$

wo in $F_m^{(n-1)}$ und $U^{(n)}$ nur die Differentialquotienten von der $n$ten Ordnung excl. abwärts vorkommen. Hieraus folgt, dass die Reihe für Δz die Form $\Delta z=G_1+\frac{G_2}{\mathfrak{R}_1^3}+\frac{G_3}{\mathfrak{R}_1^5}+$ etc. annimmt.

Wir ersehen nun, dass die Reihenentwickelung für Δz gänzlich unbrauchbar wird, wenn wir die Kurve $x=\psi$, $y=\psi_1$ so wählen, dass der Term $\mathfrak{R}_1$ verschwindet, mit einem Worte, wenn wir dafür eine Charakteristik der Gleichung $F=0$ nehmen. Der Sinn davon ist nach der Interpretation, welche wir von dieser Gleichung und ihrem Integrale gegeben, leicht zu verstehen. Wir wissen (§. 49), dass zur Individualisirung der Integraloberfläche die Bedingung nicht genügt: sie müsse durch eine oder eine endliche Anzahl von Integralcharakteristiken gehen. Sondern durch eine Integralcharakteristik kann

man unendlich viele Integraloberflächen legen, die alle, ausser der Integralcharakteristik, in ihr noch die tangirende Abwickelbare, sonst aber nichts, gemein haben.

Die Gleichung $\mathfrak{R}_1 = 0$ gehört übrigens nicht allein den Integralcharakteristiken, sondern auch den Grenzcharakteristiken an, und von letzteren wissen wir, dass sie die Integraloberfläche bestimmen, indem sie deren Rückkehrkante werden. Zwischen beiden Arten von Charakteristiken macht aber die Reihenentwickelung keinen Unterschied.

§. 85.

Bemerkungen über die allgemeinste Form der Grenzbedingungen der Differentialgleichungen erster Ordnung*).

Da man zunächst x, y, p, q aus der Reihenentwickelung

$$\Delta z = p\Delta x + q\Delta y + \text{etc.}$$

zu eliminiren hat, so erfordert dies ausser der Gleichung $F = 0$, die für die ganze xy Ebene gilt, allgemein zu reden, noch drei Gleichungen von der Form:

$$L_n(x, y, z, p, q) = 0,$$

die dann offenbar nur längs einer Kurve gelten können, da man die beiden Gleichungen der Kurve durch Elimination von p und q aus der Gleichung $F = 0$ und den Gleichungen $L_n = 0$ erhält. Die Funktionen L sind aber nicht vollkommen willkürlich. Man findet die Bedingung, der sie unterliegen, wenn man aus den fünf Gleichungen:

$$\frac{\partial L_n}{\partial x} dx + \frac{\partial L_n}{\partial y} dy + \frac{\partial L_n}{\partial z} dz + \frac{\partial L_n}{\partial p} dp + \frac{\partial L_n}{\partial q} dq = 0$$

$$X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq = 0$$

$$p dx + q dy = dz$$

die Differentiale eliminirt. Dies bedeutet, wie man leicht erkennt, nur, dass ausser der Gleichung der Grenzkurve noch die Gleichung $pdx + qdy = dz$ gilt, und sonst keine weiter, so dass die allgemeinere Bedingung sich auf die des vorigen §. zurückführen lässt.

---

*) Ich komme hier auf den §. 49 behandelten Gegenstand zurück, weil dort die gegenwärtig zur Sprache kommende Reduction der allgemeinen Bedingung nicht angegeben wurde.

Es lässt sich nun auch leicht einsehen, dass die Differentialgleichungen erster Ordnung keine zweiläufigen Grenzbedingungen zulassen. Denn wenn für eine Kurve irgend zwei Gleichungen $L=0$, $L_1=0$ zwischen den Grössen x, y, z, p, q gegeben sind, so liefern die Gleichungen:

$$F=0,\ L=0,\ L_1=0\ ;\ dF=0,\ dL=0,\ dL_1=0,\ pdx+qdy=dz$$

die Gleichungen der Grenzkurve mit einer willkürlichen Constanten behaftet; daher man von der Integraloberfläche nicht mehr fordern kann, dass sie längs einer andern Kurve einer wie immer beschaffenen willkürlichen Bedingung genüge.

Gehören, beiläufig gesagt, die Gleichungen $L=0$, $L_1=0$ einer Oberfläche an, d. h. liefern sie zusammengehörige Werthe von p und q, so folgt durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichung $F=0$ die Gleichung der Kurve, in der die Oberfläche $L=0$, $L_1=0$ von einer Integraloberfläche der Gleichung $F=0$ berührt wird.

§. 86.

Potenzentwickelung des Integrals der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einläufigen Grenzbedingungen.

Um alle Coëfficienten der Reihe

$$\Delta z=p\Delta x+q\Delta y+\frac{1}{2}\left\{r\Delta x^2+2s\Delta x\Delta y+t\Delta y^2\right\}+\text{etc.}$$

durch ihre Werthe in z längs einer Kurve auszudrücken, wenn man eine Relation $F=0$ zwischen x, y, z, p, q, r, s, t hat, welche durch das ganze Gebiet der xy Werthe gilt, braucht man, scheint es, noch sechs Gleichungen zwischen denselben Grössen, allein die folgende Form der Grenzbedingung genügt nicht allein ebenfalls, sondern hat, wie man durch ein Raisonnement analog dem des vorigen §. erkennt, die nämliche Allgemeinheit wie jene sechs Gleichungen.

Die Grenzkurve hat die Gleichungen $x=\psi(z)$, $y=\psi_1(z)$, auch sei wieder:

$$pu+qv=1,$$

wo $u=\frac{d\psi}{dz}$, $v=\frac{d\psi_1}{dz}$. Ausser diesen Gleichungen ist noch eine:

$$L\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0$$

erforderlich, und dann reichen die fünf Gleichungen $F=0$, $L=0$, $x=\psi$, $y=\psi_1$, $pu+qv=1$ zur Bestimmung aller Coëfficienten der Reihe aus. Der Kürze halber nehmen wir statt der Gleichungen $pu+qv=1$, $L=0$ folgende

$$p=U,\quad q=V \qquad 1)$$

als gegeben an. Differenzirt folgen daraus Gleichungen von der Form:

$$ru+sv=U_1,\quad su+tv=V_1 \qquad 2)$$

$$u^2\mathfrak{a}+2uv\mathfrak{b}+v^2\mathfrak{c}=U_2,\quad u^2\mathfrak{b}+2uv\mathfrak{c}+v^2\mathfrak{d}=V_2 \qquad 3)$$

etc., etc.

Mit den Gleichungen $F=0$, $x=\psi$, $y=\psi_2$, 1) 2) kann man x, y, z, p, q, r, s, t eliminiren. Um $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ zu entfernen, bedarf es ausser der Gleichungen 3) noch der Gleichungen:

$$R\mathfrak{a}+S\mathfrak{b}+T\mathfrak{c}+X'=0$$

$$R\mathfrak{b}+S\mathfrak{c}+T\mathfrak{d}+Y'=0$$

u. s. f. mit den übrigen Coëfficienten. Bildet man die Werthe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und setzt sie in das Glied dritten Grades der Reihenentwickelung ein, so erhält es den Nenner

$$\mathfrak{R}_2^2\equiv\left(R-S\frac{u}{v}+T\frac{u^2}{v^2}\right)^2.$$

Ueberhaupt zeigt die Betrachtung der obigen Gleichungen, dass die Reihenentwickelung folgende Gestalt erhält:

$$\Delta z=G_1+G_2+\frac{G_3}{\mathfrak{R}_2^2}+\frac{G_4}{\mathfrak{R}_2^3}+\text{etc.}$$

und die Entwickelung ist wieder unbrauchbar, wenn die Kurve $x=\psi$, $y=\psi_1$ so gewählt wird, dass der Term $\mathfrak{R}_2$ verschwindet, d. h. wenn sie eine Contactcharakteristik ist. Es ist dies offenbar der analoge Fall von dem für die Differentialgleichungen erster Ordnung im §. 49 synthetisch entwickelten, und er bedeutet, dass die Integraloberfläche der Gleichung zweiter Ordnung nicht individualisirt wird durch die Bedingung, eine Contactcharakteristik mit gegebener Neigung zu passiren.

§. 87.

Form der Reihenentwickelung für Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

Die Differentialgleichungen höherer als zweiter Ordnung betreffend, bemerke ich gleich, dass die Betrachtung der §§. 84

und 86 voller Allgemeinheit fähig ist. Es sei $F=0$ z. B. dritter Ordnung. So hat man wegen $x=\psi(z)$, $y=\psi_1(z)$:

$$pu+qv=1$$
$$ru^2+2uvs+tv^2+pu'+qv'=0$$

wo $u'=\frac{du}{dz}$, $v'=\frac{dv}{dz}$. Nimmt man hierzu noch zwei Gleichungen von der Form:

$$L\,(x,\,y,\,z,\,p,\,q,\,r,\,s,\,t)=0$$

als gegeben an, so kann man mit diesen Grenzbedingungen wieder alle Coëfficienten der Reihe $\Delta z=$ etc. bestimmen. Denn die drei Gleichungen:

$$r=U,\quad s=V,\quad t=W,$$

die man der Kürze halber statt der vorstehenden als gegeben annehmen kann, führen durch Differentiation auf die folgenden:

$$u^2\overset{4}{\underset{0}{z}}+2uv\overset{4}{\underset{1}{z}}+v^2\overset{4}{\underset{2}{z}}=U_2$$
$$u^2\overset{4}{\underset{1}{z}}+2uv\overset{4}{\underset{2}{z}}+v^2\overset{4}{\underset{3}{z}}=V_2$$
$$u^2\overset{4}{\underset{2}{z}}+2uv\overset{4}{\underset{3}{z}}+v^2\overset{4}{\underset{4}{z}}=W_2.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und der beiden ersten Ableitungen der Gleichung $F=0$ kann man nun die vierten Differentialquotienten aus der Reihe für Δz entfernen, und sie erhält die Form:

$$\Delta z=G_1+G_2+G_3+\frac{G_4}{\mathfrak{R}_3^2}+\frac{G_5}{\mathfrak{R}_3^3}+\text{etc.},$$

wo $\mathfrak{R}_3\equiv\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\frac{u}{v}+\mathfrak{C}\frac{u^2}{v^2}-\mathfrak{D}\frac{u^3}{v^3}$.

Ist die Differentialgleichung $F=0$ $n$ter Ordnung, und setzt man:

$$\overset{n}{\underset{p}{Z}}\equiv\frac{\partial F}{\partial\overset{n}{\underset{p}{z}}}$$

ferner:

$$\mathfrak{R}_n\equiv\sum_{p=0}^{p=n}\left(-\frac{u}{v}\right)^p\overset{n}{\underset{p}{Z}},$$

so erhält Δz die Form:

$$\Delta z=G_1+G_2+\ldots\frac{G_{n+1}}{\mathfrak{R}_n^2}+\frac{G_{n+2}}{\mathfrak{R}_n^3}+\text{etc.}$$

So lassen sich die einläufigen Grenzbedingungen in die Reihenentwickelung des Integrals der Gleichung $F=0$ für eine beliebige Ordnung einführen.

XVI. Ueber die Integraloberflächen der partiellen Differentialgleichungen bei ihrem Durchgang durch die Charakteristiken.

§. 88.

Darlegung der Untersuchungsmethode.

Wir sahen eben bei der Reihenentwickelung von z nach dem Taylor'schen Satz durchweg den Nenner $\mathfrak{R}_n$ auftreten, der es nicht gestattet, zur Ausgangskurve eine Charakteristik zu nehmen. In Bezug auf diesen Punkt findet aber bei den Differentialgleichungen derselben und verschiedener Ordnung ein verschiedenes Verhalten statt, mit dessen Feststellung wir uns in diesem Capitel beschäftigen wollen.

Betrachten wir die Reihe:

$$\Delta z = p\Delta x + q\Delta y + \text{etc.}$$

und die Differentialgleichung erster Ordnung $F=0$, so wissen wir, dass sie nicht genügt, um alle Coëfficienten zu bestimmen, sondern es bleibt in dem Gliede jeder Ordnung ein Coëfficient unbestimmt. Was erforderlich sei, um diesen zu bestimmen, wurde §. 84 gezeigt. Wählt man zur Grenzkurve eine Charakteristik, so bestimmt diese in ihrem ganzen Verlauf die ersten Differentialquotienten von z, liefert aber ausnahmsweise keine Bestimmung der Coëfficienten von der zweiten Ordnung incl. an, weil wegen $Pv - Qu = 0$ die Grössen r, s, t, etc. nur in der Verbindung $r + \frac{v}{u} s$, $s + \frac{v}{u} t$, etc. vorkommen, also nicht einzeln bestimmt werden können. Daher ist in der That die Charakteristik keine bestimmende Grenzkurve.

Wir könnten fortfahren mit ähnlichen Raisonnements die Charakteristiken aller partiellen Differentialgleichungen in Bezug auf die Differentialquotienten der sie passirenden Integraloberflächen zu untersuchen. Allein ich ziehe vor, den Gegenstand von einem andern Gesichtspunkt aus zu betrachten, der bei grösserer Evidenz eine grössere Kürze der Darstellung gestattet.

Wie wir alsbald sehen werden, kann man für die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen Schaaren von Differentialgleichungen aufstellen, in denen dann successiv alle partiellen Differentialquotienten von z und deren Differentiale im Sinne der Charakteristik vorkommen. Denkt man sich statt der Differentialquotienten $\overset{n}{\underset{m}{z}}$ beliebige Variabeln u_1, $u_2 \dots u_n$, so wäre die Schaar der Differentialgleichungen der Charakteristiken, wenn man sie bei irgend einer Ordnung der Differentialquotienten abbricht, ein System von der Form:

$$\begin{aligned} dy &= V_1 dx \\ dz &= V_2 dx \\ U_1 du_1 + U_2 du_2 + \dots U_n du_n + W dx &= 0 \\ U_1' du_1 + U_2' du_2 + \dots U_n' du_n + W' dx &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots & \\ \underset{1}{U^{(m)}} du_1 + \underset{2}{U^{(m)}} du_2 + \dots U_n^{(m)} du_n + W^{(m)} dx &= 0, \end{aligned}$$

wo die Grössen U, V, W von den Variabeln x, y, z, u_1, $u_2 \dots u_n$ abhängen.

Man kann leicht untersuchen, wie weit längs einer individuellen Charakteristik die Grössen u_1, $u_2 \dots u_n$ bestimmt sind. Denn durch Variation nach den u_1, $u_2 \dots u_n$ des vorstehenden Systems erhält man ebenso viel Gleichungen, welche die Variationen δu_1, $\delta u_2 \dots \delta u_n$ und deren Differentiale enthalten, als Differentialgleichungen vorhanden waren. Ist nun die Anzahl der Differentialgleichungen grösser als n (wie ich hier voraussetze), so fände man aus den variirten Gleichungen nach bekannten Prinzipien durch fortgesetzte Differentiation und Elimination schliesslich Bedingungsgleichungen für die U, V, W. Sind diese wegen der Form der partiellen Differentialgleichung nicht erfüllbar, so folgt, dass die Variationen der u_1, $u_2 \dots n_n$ verschwinden, dass mithin die u_1, $u_2 \dots u_n$ längs einer individuellen Charakteristik bestimmt sind. Werden die Bedingungsgleichungen aber identisch erfüllt, so verschwinden die Variationen nicht, und die Grössen u_1, $u_2 \dots u_s$ sind längs einer individuellen Charakteristik nicht bestimmt.

In diesem Sinne wollen wir nun die Gleichungen der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen der Betrachtung unterwerfen.

§. 89.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wir wollen der Bequemlichkeit halber der Differentialgleichung erster Ordnung die Form:

$$p + F = 0$$

geben, wo F nur x, y, z, q enthält. Zur Charakteristik gehören dann einmal die allen Kurven auf Integraloberflächen gemeinsamen totalen Differentialgleichungen, welche durch das Symbol:

$$d\overset{n}{\underset{m}{z}} = \overset{n+1}{\underset{m}{z}}\,dx + \overset{n+1}{\underset{m+1}{z}}\,dy$$

dargestellt werden, und dann insbesondere folgende Schaar:

$$\begin{aligned} dy &= Qdx \\ dp + F_0'dx &= 0 \\ dq + F_1'dx &= 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ d\overset{n}{\underset{m}{z}} + F_m^{(n)}dx &= 0 \end{aligned}$$

Um die Grösse $F_m^{(n)}$ zu bilden, hat man die Gleichung $p+F=0$ erst $n-m$mal nach x und dann $m$mal nach y zu differenziren, wodurch man erhält:

$$\overset{n+1}{\underset{m}{z}} + Q\,\overset{n+1}{\underset{m+1}{z}} + F_m^{(n)} = 0.$$

Diese Schaar von Gleichungen ist so beschaffen, dass sie eine zur Bestimmung der darin enthaltenen Variabeln genügende Anzahl von Differentialgleichungen liefert, wenn man sie bei irgend einer Ordnung der Differentialquotienten abbricht. Denkt man sich aber die Differentialquotienten $\overset{n}{\underset{m}{z}}$ durch Auflösung der Schaar von Differentialgleichungen bestimmt, so würden sie von Constanten abhängig, deren Anzahl zugleich mit n ins Unbegrenzte wüchse. Diese Constanten, durch die Werthe der $\overset{n}{\underset{m}{z}}$ an einem festen Punkte der Charakteristik ausgedrückt, dienen dann zur Individualisirung der durch die Charakteristik zu führenden Integraloberfläche. Anders lassen sich die Werthe der Grössen $\overset{n}{\underset{m}{z}}$ aus den obigen Gleichungen nicht ermitteln.

Variiren wir zunächst nach p und q die Gleichungen:

$$dz = pdx + qdy$$
$$dy = Qdx,$$

so folgt daraus unbedingt $\delta p = 0$, $\delta q = 0$, so dass p und q längs einer Charakteristik für alle diese Charakteristik enthaltenden Integraloberflächen die nämlichen sein müssen.

Für r, s, t haben wir ferner die Gleichungen:

$$dp = rdx + sdy \qquad dr + F_0''dx = 0$$
$$dq = sdx + tdy \qquad ds + F_1''dx = 0$$
$$dt + F_2''dx = 0$$

und es ist:

$$F_0'' = s\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial X'}{\partial x}$$
$$F_1'' = s\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial X'}{\partial y}$$

Variirt man nun die erste Gleichung links und die beiden ersten rechts, so folgt:

$$0 = \delta r + Q\delta s \qquad d\delta r + \delta F_0''dx = 0$$
$$0 = \delta s + Q\delta t \qquad d\delta s + \delta F_1''dx = 0.$$

Die Gleichung $\delta r dx + \delta s dy = 0$ differenzirt, und die Grössen $d\delta r$ und $d\delta s$ eliminirt, folgt unter Benutzung obiger Werthe für F_0'' und F_1'':

$$0 = s\left(\delta\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\delta\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \delta\frac{\partial X'}{\partial x} + Q\delta\frac{\partial X'}{\partial y}$$

eine Gleichung, die offenbar identisch stattfindet. Ebenso würde die Variation der Gleichung $dt + F_2''dx = 0$ keine neue Gleichung zur Bestimmung der Variationen δr, δs, δt liefern. Diese verschwinden mithin nicht längs der Charakteristik. Dasselbe gilt von den höheren Differentialquotienten, wie man mit Hülfe einer ähnlichen Rechnung leicht erkennt.

In einem Punkt $\mathfrak{P}$ einer Kurve K auf einer Oberfläche legen wir an die Oberfläche die Tangentialebene:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

und thun das Nämliche für die in unendlich kleinen Distanzen aufeinanderfolgenden Punkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, ... der Kurve K. Dann möge die Abwickelbare, welche die Hülle dieser Ebenen ist, »tangirende Fläche ersten Grades« heissen. Construirt man ebenso für die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ ... der Kurve K die Flächen:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) + \\ + \frac{1}{2}\left\{r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2\right\},$$

so heisse die Hülle dieser Flächen: Tangirende zweiten Grades, u. s. f.

Nunmehr kann man sagen: Alle durch eine Charakteristik geführten Integraloberflächen der Gleichung $p + F = 0$ haben in dieser Charakteristik die Tangirende ersten Grades (die charakteristische Abwickelbare des §. 32) gemein.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Integraloberflächen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung sich bei ihrem Durchgang durch ihre Charakteristiken verhalten.

§. 90.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Differentialgleichungen ihrer Charakteristiken.

Wir geben den Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Form:

$$r + F = 0,$$

wo F nur von x, y, z, p, q, s, t abhängt. Die partiellen Differentialquotienten von F werden wieder durch die entsprechenden Initialen bezeichnet.

Es seien N_+ und N_- die Wurzeln der Gleichung:

$$dy^2 - S dx dy + T dx^2 = 0$$

nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, und wir setzen:

$$N_\pm = \frac{1}{2}\left\{S \pm \sqrt{S^2 - 4T}\right\}.$$

Für die Charakteristiken hat man ausser den allgemeinen Gleichungen:

$$d\overset{n}{\underset{m}{z}} = \overset{n+1}{\underset{m}{z}}\,dx + \overset{n+1}{\underset{m+1}{z}}\,dy$$

insbesondere die Doppelschaar von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
&dy = N_\pm dx \\
&dr + N_\mp ds + F_0' dx = 0 \\
&ds + N_\mp dt + F_1' dx = 0 \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&d\overset{n+1}{\underset{m}{z}} + N_\mp d\overset{n+1}{\underset{m+1}{z}} + F_m^{(n)} dx = 0
\end{aligned}$$

Die Grösse $F_m^{(n)}$ findet man, wenn man die Gleichung $r+F=0$ $n-m$ mal nach x und m mal nach y differenzirt. Dies giebt:

$$\overset{n+2}{\underset{m}{z}} + S \overset{n+2}{\underset{m+1}{z}} + T \overset{n+2}{\underset{m+2}{z}} + F_m^{(n)} = 0.$$

Die oben verzeichnete Doppelschaar von Differentialgleichungen der Charakteristiken stellt zwei Schaaren vor, die man erhält, wie folgt. Bei der ersten lassen wir die allgemeinen Differentialgleichungen unverändert und schreiben in den besonderen N_+ statt $N_\pm$, N_- statt $N_\mp$. Bei der zweiten schreiben wir in allen Gleichungen d_1 statt d, N_- statt $N_\pm$ und N_+ statt $N_\mp$.

Bei einigen Familien von Differentialgleichungen lassen die Gleichungen der Charakteristiken bemerkenswerthe Modificationen zu.

I. Hat zunächst die Differentialgleichung $r+F=0$ die Form

$$r + Ss + Tt + U = 0,$$

wo S, T, U Funktionen nur von x, y, z, p, q vorstellen, so kömmt noch eine Gleichung hinzu, nämlich:

$$d\overset{1}{\underset{0}{z}} + N_\mp\, d\overset{1}{\underset{1}{z}} + F_0^{(o)}dx = 0$$

oder

$$dp + N_\mp\, dq + Udx = 0.$$

Man hat in diesem Falle für die Variabeln x, y, z, p, q die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ dy &= N_\pm dx \\ dp + N_\mp dq + Udx &= 0. \end{aligned}$$

II. Noch in einigen besonderen Fällen kann man für jene fünf Variabeln drei Differentialgleichungen aufstellen, in denen nur sie vorkommen.

Hat z. B. die Differentialgleichung $r+F=0$ die Form:

$$r + Ss + Tt + A\,(rt - s^2) + U = 0\,^{*)},$$

so kann man der Gleichung $dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\, dxdy + \frac{\partial F}{\partial t}\, dx^2 = 0$ die Form:

$$dy^2 - Sdxdy + Tdx^2 + A\,(dxdp + dydq) = 0$$

*) S. die §. 25 citirte Abhandlung von Ampère.

geben. Daraus erhält man denn noch die Gleichung:

$$dpdy + Tdqdx + Adpdq + Udxdy = 0,$$

die auch, bezeichnet man mit $N_\pm$ die Wurzeln der Gleichung

$$dy^2 - Sdxdy + Tdx^2 + A(dxdp + dydq) = 0$$

nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, geschrieben werden kann:

$$dp + N_\pm dq + Udx = 0.$$

Mithin lauten in diesem Falle die Differentialgleichungen der Charakteristiken für die Variabeln x, y, z, p, q:

$$\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ dy^2 - Sdxdy &+ Tdx^2 + A(dxdp + dydq) = 0 \\ dp &+ N_\pm dq + Udx = 0. \end{aligned}$$

III. Endlich ist noch anzugeben, in welchen Fällen die Grösse $N_\pm$ die Variabeln s und t nicht enthält, wenngleich die Differentialgleichung in Bezug auf r, s, t nicht lineär ist. Die allgemeinste Form der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche eine der Grössen N_+ oder N_- von s und t unabhängig wird, ist folgende:

$$F(x, y, z, p, q, r + \varphi s, s + \varphi t) = 0,$$

wo φ die Variabeln x, y, z, p, q enthalten kann. Die Wurzeln der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s} dxdy + \frac{\partial F}{\partial t} dx^2 = 0$, nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, sind dann:

$$\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial(s+\varphi t)}}{\frac{\partial F}{\partial(r+\varphi s)}}.$$

Sollen beide Grössen N_+ und N_- von r, s, t unabhängig werden, so fällt man auf die Gleichung $r+Ss+Tt+U=0$.

Die eben mitgetheilte Gleichung hat noch die ad II hervorgehobene Eigenthümlichkeit, dass für ihr eines Charakteristikensystem die Variabeln x, y, z, p, q ebenfalls von drei Differentialgleichungen abhängen, in denen nur sie vorkommen. Diese Differentialgleichungen sind:

$$\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ dy &= \varphi dx \\ F&\left(x, y, z, p, q, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}\right) = 0. \end{aligned}$$

Es muss mithin auf dies System von Differentialgleichungen ebenfalls die MONGE'sche Regel anwendbar sein, dass, wenn

es zwei Integrale $\alpha = \lambda$, $\beta = \lambda_1$ zulässt, die Gleichung $\Theta(\lambda, \lambda_1) = 0$ (wo Θ eine willkürliche Funktion) ein erstes Integral der Differentialgleichung $F = 0$ ist.

§. 91.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ergebniss der Variation der Differentialgleichungen der Charakteristiken nach den Differentialquotienten von z.

Betrachten wir zunächst die Differentialgleichungen der Charakteristiken, in denen nur die Variabeln x, y, z, p, q, r, s, t vorkommen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} dz = pdx + qdy & dy = N_{\pm} dx \\ dp = rdx + sdy & dr + N_{\mp} ds + F_0' dx = 0 \\ dq = sdx + tdy & ds + N_{\mp} dt + F_1' dx = 0 \end{array}\right\} C$$

Hierin ist:

$$F_0' \equiv Pr + Qs + Zp + X$$
$$F_1' \equiv Ps + Qt + Zq + Y.$$

Variirt man die sechs Gleichungen C nach den Grössen p, q, r, s, t: so ist offenbar eine Ueberbestimmung der Variationen δp, dq, δs, δr, δt vorhanden, wenn die Form der Gleichungen C nicht gewisse Bedingungen erfüllt. Ob dies der Fall sei, wollen wir nun untersuchen. Man hat erstens:

$$1)\quad \delta N_{\pm} = 0$$
$$2)\quad \delta p + N_{\pm} \delta q = 0$$
$$3)\quad d\delta p = (\delta r + N_{\pm} \delta s) dx$$
$$4)\quad d\delta q = (\delta s + N_{\pm} \delta t) dx.$$

Ferner giebt unter Berücksichtigung vorstehender Gleichungen $r + F = 0$ variirt:

$$5)\quad d\delta p + N_{\mp} d\delta q + (P\delta p + Q\delta q) dx = 0.$$

Endlich lauten die beiden letzten Gleichungen C, Kolumne rechts, variirt:

$$6)\quad \begin{cases} d\delta r + N_{\mp} d\delta s + ds\delta N_{\mp} + dx\delta F_0' = 0 \\ d\delta s + N_{\mp} d\delta t + dt\delta N_{\mp} + dx\delta F_1' = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung 6) mit $N_{\pm}$ und addirt sie zur ersten Gleichung 6), so ist die resultirende Relation identisch mit derjenigen, welche man durch Differentiation von

5) erhält, nachdem darin $(\delta r + N_{\pm}\delta s)dx$ und $(\delta s + N_{\pm}\delta t)dx$ für $d\delta p$ und $d\delta q$ eingesetzt worden. Mithin reduciren sich die vorstehenden sieben Variationsgleichungen auf nur sechs wesentlich verschiedene.

Wir beginnen nunmehr mit der Untersuchung der Differentialgleichung *ad* III des vorigen §, die wir uns auf die Form:

$$r + \varphi s + \psi(x, y, z, p, q, s + \varphi t) = 0$$

gebracht denken, und es sei:

$$N_{\pm} = \varphi, \quad N_{\mp} = \frac{\partial \psi}{\partial(s+\varphi t)} = \psi'.$$

Nimmt man zuerst an, dass φ keine von den Grössen p, q enthält, so fällt auch Gleichung 1) fort und es bleiben so viel Gleichungen wie Variationen übrig, nämlich fünf, so dass die Variationen nicht verschwinden, sondern Differentialgleichungen genügen müssen. Es scheint dies also der analoge Fall zu sein, wie bei den linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wo ebenfalls längs der Charakteristiken die Variationen δp und δq nicht verschwinden.

Enthält ferner φ mindestens eine von den Variabeln p und q, so folgt aus $\delta\varphi = 0$, $\delta p + \varphi\delta q = 0$:

$$\delta p = 0, \quad \delta q = 0.$$

Da man hier

$$\delta r + \varphi\delta s = 0$$
$$\delta s + \varphi\delta t = 0$$

hat, so würden diese Gleichungen im Verein mit den Gleichungen 6) vier Gleichungen für die drei Variationen δr, δs, δt betragen, welche also einer Ueberbestimmung unterlägen, mithin verschwinden müssten, allein hier tritt gerade der Umstand ein, dass die Form dieser vier Gleichungen die Bedingungen erfüllt, vermöge deren die Variationen nicht verschwinden, sondern Differentialgleichungen zu genügen haben. Wenn man nämlich die Gleichungen $\delta r + \varphi\delta s = 0$, $\delta s + \varphi\delta t = 0$ differenzirt, um aus ihnen und den Gleichungen 6) die Grössen $d\delta r$, $d\delta s$, $d\delta t$ zu eliminiren, und bedenkt, dass auch $\delta N_{\mp} = 0$ ist, so folgt zunächst:

$$-d\varphi(\delta s + \psi'\delta t) + dx(\delta F_0' + \varphi\delta F_1') = 0.$$

Es ist aber in der Gleichung $r+F=0$ im vorliegenden Falle $F = \varphi s + \psi(x, y, z, p, q, s + \varphi t)$, und eine leichte Rechnung ergiebt die Identität:

$$dx\,(\delta F_0' + \varphi\delta F') \pm d\varphi\,(\delta s + \psi'\delta t).$$

Daher involviren in der That jene vier Gleichungen keine Ueberbestimmung für die Variationen δr, δs, δt, und wir schliessen daraus, dass alle Integraloberflächen der Gleichung $r + \varphi s + \psi = 0$, welche eine ihrer Charakteristiken passiren, darin nur die Tangirende **ersten** Grades gemein haben.

Betrachten wir endlich die allgemeine Gleichung $r + F = 0$, indem wir annehmen, dass die Grösse $N_\pm$ die Variabeln p, q, s, t, oder von jeder Klasse p, q und s, t mindestens eine enthält. Wenn übrigens in $N_\pm$ die Variabeln p, q gar nicht vertreten sind, so ist das Resultat dasselbe. Es ist nicht meine Absicht, hier die Elimination der Variationen auszuführen, da das Format dieser Beiträge so weitläufige Rechnungen nicht gestattet. Ausserdem hat die Rechnung an sich kein Interesse, und bezweckt nur eine falsche Gleichung schliesslich herzuleiten, woraus dann folgt, dass die Variationen verschwinden. Man kann übrigens, ohne die Rechnung wirklich durchzuführen, übersehen, dass sie ein solches Resultat ergeben muss.

Es seien δp, δq, δs, δt die zu eliminirenden Variationen: so wählen wir von den Gleichungen 1) bis 6) folgende fünf:

$$\delta N_\pm = \frac{\partial N_\pm}{\partial s}\delta s + \frac{\partial N_\pm}{\partial t}\delta t + \frac{\partial N_\pm}{\partial p}\delta p + \frac{\partial N_\pm}{\partial q}\delta q = 0$$

$$\delta p + N_\pm \delta q = 0$$

$$d\delta q = (\delta s + N_\pm \delta t)\,dx$$

$$d\delta p + N_\mp d\delta q + (P\delta p + Q\delta q)\,dx = 0$$

$$d\delta s + N_\mp d\delta t + dt\,\delta N_\mp + dx\,\delta F_1' = 0.$$

Wir differenziren die erste, dritte und vierte Gleichung einmal; die zweite zweimal, und erhalten so im Ganzen zehn Gleichungen für die neun Verhältnisse der Grössen: δp, δq, δs, δt, $d\delta p$, $d\delta q$, $d^2\delta p$, $d^2\delta q$, $d\delta s$, $d\delta t$.

Hat man diese eliminirt, so enthält die Resultirende den Term d^2N, welcher seinerseits die in der Eliminationsgleichung übrigens nicht vorkommenden Grössen $\frac{\partial^3 F}{\partial s\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 F}{\partial s\partial y^2}$, etc. enthält. Die dritten Differentiale von F treten sonst nur noch in der Gleichung $d\delta N_\pm = 0$ auf, wo F aber immer mindestens

zweimal nach den Grössen p, q, s, t differenzirt ist. Die höchsten in der Eliminationsgleichung und zwar in d^2N vorkommenden Differentialquotienten von z sind vierter Ordnung. Wird $r+F=0$ dreimal differenzirt, so erhält man fünfte Differentialquotienten von z. Aus den vier dritten Ableitungen von $r+F=0$ kann man aber die sechs fünften Differentialquotienten von z nicht eliminiren, mithin kann durch Differentiation und Elimination keine Gleichung aus $r+F=0$ hergeleitet werden, die dritte Differentialquotienten von F und keine fünften von z enthält.

Hieraus folgt denn, dass die vorstehenden fünf Gleichungen eine Ueberbestimmung der Variationen δp, δq, δs, δt involviren, also dass diese verschwinden, mithin, dass sämmtliche, eine Charakteristik passirende Integraloberflächen der Gleichung $r+F=0$ darin die Tangirende zweiten Grades gemein haben, sich darin osculiren.

§. 92.

Die Variationen der dritten und höheren Differentialquotienten.

Um diese Untersuchung zu vollenden, haben wir noch zu prüfen, ob die Variationen der dritten und höheren Differentialquotienten verschwinden. Für die dritten Differentialquotienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gelten die Gleichungen:

$$dr = \mathfrak{a}dx + \mathfrak{b}dy \qquad d\mathfrak{a} + N_{\mp} d\mathfrak{b} + F_0''dx = 0$$
$$ds = \mathfrak{b}dx + \mathfrak{c}dy \qquad d\mathfrak{b} + N_{\mp} d\mathfrak{c} + F_1''dx = 0$$
$$dt = \mathfrak{c}dx + \mathfrak{d}dy \qquad d\mathfrak{c} + N_{\mp} d\mathfrak{d} + F_2''dx = 0.$$

Hierin ist:

$$F_0'' = \mathfrak{b}\frac{dS}{dx} + \mathfrak{c}\frac{dT}{dx} + \mathfrak{a}P + \mathfrak{b}Q + rZ + r\frac{dP}{dx} + s\frac{dQ}{dx} + p\frac{dZ}{dx} + \frac{dX}{dx}$$

$$F_1'' = \mathfrak{b}\frac{dS}{dy} + \mathfrak{c}\frac{dT}{dy} + \mathfrak{b}P + \mathfrak{c}Q + sZ + r\frac{dP}{dy} + s\frac{dQ}{dy} + p\frac{dZ}{dy} + \frac{dX}{dy}$$
$$\equiv \mathfrak{c}\frac{dS}{dx} + \mathfrak{d}\frac{dT}{dx} + \mathfrak{b}P + \mathfrak{c}Q + sZ + s\frac{dP}{dx} + t\frac{dQ}{dx} + q\frac{dZ}{dx} + \frac{dY}{dx}$$

$$F_2'' = \mathfrak{c}\frac{dS}{dy} + \mathfrak{d}\frac{dT}{dy} + \mathfrak{c}P + \mathfrak{d}Q + tZ + s\frac{dP}{dy} + t\frac{dQ}{dy} + q\frac{dZ}{dy} + \frac{dY}{dy}.$$

Setzt man nun in obigen Differentialgleichungen $N_\pm dx$ für dy, variirt sie nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ allein (weil die Variationen δp, δq, δr, δs, δt, $\delta N_\pm$, $\delta N_\mp$ mit allen ihren Differentialien verschwinden, differenzirt die linke Columne und eliminirt dann die Grössen $d\delta\mathfrak{a}$, $d\delta\mathfrak{b}$, $d\delta\mathfrak{c}$ $d\delta\mathfrak{d}$, so folgt:

$$(\delta F_0''+N_\pm \delta F_1'')dx = dN_\pm(\delta\mathfrak{b}+N_\mp\delta\mathfrak{c})$$
$$(\delta F_1''+N_\pm \delta F_2'')dx = dN_\pm(\delta\mathfrak{c}+N_\mp\delta\mathfrak{d}).$$

Wegen $N_\pm+N_\mp\equiv S$, $N_\pm N_\mp\equiv T$, $\delta\mathfrak{b}+N_\pm\delta\mathfrak{c}=0$, $\delta\mathfrak{c}+N_\pm\delta\mathfrak{d}=0$ hat man aber:

$$dN_\pm(\delta\mathfrak{b}+N_\mp\delta\mathfrak{c}) = dS\delta\mathfrak{b}+dT\delta\mathfrak{c}$$
$$dN_\pm(\delta\mathfrak{c}+N_\mp\delta\mathfrak{d}) = dS\delta\mathfrak{c}+dT\delta\mathfrak{d}.$$

Unter Zugrundelegung der oben angeführten expliciten Ausdrücke für F_0'', F_1'', F_2'' kann man von den Gleichungen:

$$(\delta F_0''+N_\pm \delta F_1'')dx \equiv dS\delta\mathfrak{b}+dT\delta\mathfrak{c}$$
$$(\delta F_1''+N_\pm \delta F_2'')dx \equiv dS\delta\mathfrak{c}+dT\delta\mathfrak{d},$$

indem man die Variationen und Differentiationen ausführt, nachweisen, dass sie Identitäten sind. Also können aus den obigen Differentialgleichungen der Charakteristiken für die dritten Differentialquotienten die Variationen $\delta\mathfrak{a}$, $\delta\mathfrak{b}$, $\delta\mathfrak{c}$, $\delta\mathfrak{d}$ nicht eliminirt werden, und *die Bedingung: die Integraloberfläche müsse durch eine Charakteristik gehen, enthält keine Bestimmung für die dritten, und* — ich darf wohl ohne Weiteres hinzufügen — *für die höheren Differentialquotienten von* z, *so dass die Integraloberfläche bis auf ihre Tangirende zweiten Grades unbestimmt bleibt.* Davon nämlich, dass die Variationen der höheren Differentialquotienten von z nicht verschwinden, überzeugt man sich auf ganz ähnliche Weise, wie von dem Nichtverschwinden der Variationen $\delta\mathfrak{a}$, $\delta\mathfrak{b}$, $\delta\mathfrak{c}$, $\delta\mathfrak{d}$.

Ich werde im folgenden §. noch die Differentialgleichungen der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen dritter und höherer Ordnung mittheilen, die gegenwärtige Untersuchung für diese Differentialgleichungen aber nicht anstellen, theils weil man dabei auf neue, nicht in der Kürze zu beseitigende Schwierigkeiten, die ich sofort näher bezeichnen werde, stösst, theils weil es mir hauptsächlich darum zu thun ist, zunächst in das Verständniss der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung einzudringen: überzeugt, dass mit diesem Verständ-

niss der Schlüssel zu den partiellen Differentialgleichungen aller Ordnungen gewonnen ist.

§. 93
Gleichungen der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

Es sei $\mathfrak{a}+F=0$ eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, in der F von den dritten Differentialquotienten nur $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ enthält. Bezeichnet man mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ die Differentialquotienten von F nach $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, und mit N_1, N_2, N_3 die Wurzeln der Gleichung:

$$dy^3-\mathfrak{B}dxdy^2+\mathfrak{C}dx^2dy-\mathfrak{D}dx^3=0$$

nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, dann ist die eine Schaar der Gleichungen der Charakteristiken:

$$d\mathfrak{a}+d\mathfrak{b}(N_2+N_3)+d\mathfrak{c}N_2N_3+F_0'dx=0$$
$$d\mathfrak{b}+d\mathfrak{c}(N_2+N_3)+d\mathfrak{d}N_2N_3+F_1'dx=0$$
$$\text{etc.}=0$$

F_0' und F_1' etc. erhält man aus den Gleichungen:

$$\overset{4}{\underset{0}{z}}+\mathfrak{B}\overset{4}{\underset{1}{z}}+\mathfrak{C}\overset{4}{\underset{2}{z}}+\mathfrak{D}\overset{4}{\underset{3}{z}}+F_0'=0$$

$$\overset{4}{\underset{1}{z}}+\mathfrak{B}\overset{4}{\underset{2}{z}}+\mathfrak{C}\overset{4}{\underset{3}{z}}+\mathfrak{D}\overset{4}{\underset{4}{z}}+F_1'=0$$

$$\text{etc.}=0.$$

Dazu kömmt dann die Gleichung $dy=N_1dx$ und die Schaar der Gleichungen: $d\overset{n}{\underset{m}{z}}=\overset{n+1}{\underset{m}{z}}dx+\overset{n+1}{\underset{m+1}{z}}dy$. Die beiden anderen Schaaren erhält man, wenn man statt der Indices 1, 2, 3 das eine Mal 2, 1, 3, das andere Mal 3, 1, 2 schreibt; und statt d das eine Mal d_1, das andere Mal d_2 schreibt.

Nehmen wir nun an, wir hätten es mit einer partiellen Differentialgleichung $n$ter Ordnung von der Form: $\overset{n}{\underset{0}{z}}+F=0$ zu thun, und bezeichnen mit $\overset{n}{\underset{p}{Z}}$ den Differentialquotienten von $\overset{n}{\underset{0}{z}}+F$ nach $\overset{n}{\underset{p}{z}}$ und mit N_1, N_2, $\ldots N_n$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-p}\overset{n}{\underset{p}{Z}}=0$$

nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, so hat die erste Gleichung der ersten Schaar Differentialgleichungen der Charakteristiken die Form:

$$d\overset{n}{\underset{0}{z}} + d\overset{n}{\underset{1}{z}}(N_2 + \ldots N_n) + d\overset{n}{\underset{2}{z}}(N_2 N_3 + N_2 N_4 + \ldots)$$
$$+ \text{etc.} + d\overset{n}{\underset{n-1}{z}} N_2 \ldots N_n + F_0{}' dx = 0$$

und es ist nach dem Früheren wohl überflüssig, länger bei diesem Gegenstande zu verweilen, da sich die übrigen Gleichungen der Charakteristiken im Falle der Gleichung $\overset{n}{\underset{0}{z}} + F = 0$ auf ganz analoge Weise wie bei den Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung ergeben.

Dagegen ist über die Ausdehnung der Betrachtung des vorigen §. auf die partiellen Differentialgleichungen dritter und höherer Ordnung noch Einiges zu bemerken.

Fasst man von der ersten Schaar Gleichungen der Charakteristiken der Gleichung $\mathfrak{a} + F = 0$ diejenigen ins Auge, welche nur die Variabeln: x, y, z, p, q, r, s, t, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ enthalten, so hat man hier ausser der Gleichung $dy = N_1 dx$ noch zwei Differentialgleichungen der Charakteristiken und von den allgemeinen Differentialgleichungen sechs. Dies macht neun Gleichungen auf zwölf Variabeln, und wenn wir eine der Variabeln mit Hülfe der Gleichung $\mathfrak{a} + F = 0$ eliminiren, so bleiben acht Gleichungen auf elf Variabeln. Um eine individuelle Charakteristik zu erhalten, müssten wir daher zwei Gleichungen nach Belieben hinzunehmen, und könnten zu diesem Zweck offenbar die Gleichungen der Projectionen der Charakteristik wählen.

Wenn nun bei den Differentialgleichungen dritter Ordnung ähnliche Beschränkungen wie bei den Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung für die Integraloberflächen, welche eine Charakteristik passiren, einträten, so würde hier ein Widerspruch mit den Resultaten des Kapitels XV stattfinden, nach denen bei den Integraloberflächen der Differentialgleichungen dritter Ordnung längs einer gegebenen Kurve die ersten und zweiten Differentialquotienten von z willkürlich sind: ein Widerspruch deshalb, weil wir eben sahen, dass beide Projectionen der Charakteristiken nach Willkür angenommen

werden können, dass also bei den Differentialgleichungen dritter Ordnung und *a fortiori* bei denen höherer Ordnung jede Kurve im Raume Charakteristik sein kann. Nun findet aber, wie ich aus Gründen, die ich hier noch nicht darlegen kann, schliesse, das Gesetz statt, dass alle Integraloberflächen der Gleichung $\overset{n}{\underset{0}{z}}+F=0$, welche eine Charakteristik passiren, darin die Tangirende $n$ter Ordnung gemein haben müssen. Hierin liegt die am Schluss des vorigen §. erwähnte Schwierigkeit.

Die Art, wie ich glaube, den bezeichneten Widerspruch lösen zu können, ist folgende. Es sei

$$f \equiv f(x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer Integraloberfläche der Gleichung $\overset{n}{\underset{0}{z}}+F=0$, so kann man mit Hülfe der Gleichung $f=0$ z und alle Differentialquotienten von z von den ersten bis zu den $n$ten *incl.* als Funktionen von x und y ausdrücken und sie in die Gleichung:

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-p} \overset{n}{\underset{p}{Z}} = 0$$

einsetzen. Die Auflösung dieser Differentialgleichung würde n Schaaren von Charakteristiken auf der Oberfläche $f=0$ liefern. Jede andere Kurve auf der Oberfläche $f=0$ kann zwar eine Charakteristik der Gleichung $\overset{n}{\underset{0}{z}}+F=0$ sein, d. h. die Charakteristik einer anderen Integraloberfläche dieser Gleichung sein, nie aber eine solche der Oberfläche $f=0$. Umgekehrt sieht man ein, dass man durch eine gegebene Kurve einmal Integraloberflächen der Gleichung $\overset{n}{\underset{0}{z}}+F=0$ legen kann, für welche die Kurve zu einer der n Charakteristikenschaaren der Integraloberflächen gehört, und dann solche Integraloberflächen, für welche dies nicht der Fall ist. Und ich behaupte nun, dass alle Integraloberflächen der Gleichung $\overset{n}{\underset{0}{z}}+F=0$, welche durch eine gegebene Kurve gehen und zu denen

diese Kurve Charakteristik ist, in dieser die Tangirende $n$ten Grades gemein haben.

§. 94.

Ueber einen Fall bei den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, der bei den bisherigen Betrachtungen übergangen wurde, nämlich wenn $N_+ = N_-$ ist.

Dieser Fall ist von Interesse, weil die Differentialgleichungen, bei denen $N_+ = N_-$ ist, unter den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung eine besondere und scharf geschiedene Klasse bilden. Welches die Form dieser Klasse von Differentialgleichungen und ihre wichtigste Eigenthümlichkeit sei, ist bereits §. 23 gezeigt worden. In Bezug auf die §. 91 u. 92 untersuchten Eigenschaften der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zeigen sie gleichfalls ein von den übrigen gänzlich abweichendes Verhalten.

Die Differentialgleichungen ihrer Charakteristiken für die Variabeln x, y, z, p, q, r, s, t, setzen wir $N_+ = N_- \equiv N$, lauten:

$$\left.\begin{array}{ll} dz = (p + Nq)\,dx & dy = N dx \\ dp = (r + Ns)\,dx & dr + N ds + F_0' dx = 0 \\ dq = (s + Nt)\,dx & ds + N dt + F_1' dx = 0 \end{array}\right\} C.$$

Wenn zunächst N nur x, y, z, enthält, die Differentialgleichung also die Form $r + 2Ns + N^2 t + U = 0$ hat, so kommt noch die Gleichung:

$$dp + N dq + U dx = 0$$

hinzu, wo U von x, y, z, p, q abhängen kann. Variirt man nun vorstehende Gleichung und die Gleichung $dz = (p + Nq)dx$ und differenzirt noch die letzte, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta p + N \delta q &= 0 \\ d\delta p + N d\delta q + \delta q dN &= 0 \\ d\delta p + N d\delta q + \delta U dx &= 0, \end{aligned}$$

aus denen unbedingt folgt:

$$\delta p = 0, \quad \delta q = 0.$$

Ferner geben die zwei letzten Gleichungen jeder Columne C variirt, und die Gleichungen aus der Columne linker Hand ausserdem noch differenzirt:

$$d\delta r + Nd\delta s + \delta s dN = 0 \qquad d\delta r + Nd\delta s + \delta F_0' dx = 0$$
$$d\delta s + Nd\delta t + \delta t dN = 0 \qquad d\delta s + Nd\delta t + \delta F_1' dx = 0$$

Hieraus folgt, wie man auf den ersten Blick sieht:

$$\delta r = 0, \ \delta s = 0, \ \delta t = 0$$

und ebenso genügt ein Blick auf die im §. 92 gegebenen Differentialgleichungen der Charakteristiken für die dritten Differentialquotienten, um zu erkennen, dass auch deren Variationen verschwinden, u. s. f. Kurz längs einer Charakteristik dieser Gleichungen sind alle Differentialquotienten der die Charakteristik passirenden Integraloberfläche bestimmt. Mit andern Worten: es geht nur eine Integraloberfläche durch die Charakteristik, die Integraloberfläche ist vollkommen bestimmt durch die Bedingung, sie müsse durch eine gegebene Charakteristik gehen.

Dasselbe findet statt, wenn man in Betreff der Grösse N gar keine Annahme macht. Denn auch dann folgt aus den Gleichungen:

$$\delta p + N\delta q = 0$$
$$d\delta p + Nd\delta q + (P\delta p + Q\delta q)\, dx = 0,$$

dass die Variationen δp und δq verschwinden, und hieraus ergiebt sich wieder, ganz wie wir dies so eben gesehen haben, dass die Variationen der Differentialquotienten aller Ordnungen verschwinden müssen.

Wir schliessen somit, dass die Integraloberflächen der Gleichung $r + F = 0$, wenn vermöge ihrer Form $N_{\pm} = N_{\mp}$ ist, vollkommen bestimmt sind durch die Bedingung, eine gegebene Charakteristik passiren zu müssen.

Diese Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat also merkwürdiger Weise mit der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung das gemein, dass ihre Integraloberflächen bestimmt sind durch die Bedingung, eine Kurve enthalten zu müssen. Diese Kurve ist aber wieder im Gegensatz zu den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bei der uns beschäftigenden Klasse von Differentialgleichungen eine Charakteristik. In den Gleichungen dieser Charakteristik kann nur eine willkürliche Funktion vorkommen. Man kann daher sagen, dass die Integraloberflächen der in Rede stehen-

den Differentialgleichungen von einer willkürlichen Funktion abhängen — soweit wir sie nämlich bis jetzt kennen. Ich komme noch ausführlicher auf denselben Gegenstand zu sprechen, nachdem ich über das »Problem der Reduction der linearen Differentialgleichungen« einige Bemerkungen werde vorangeschickt haben.

§. 95.

Das Problem der Reduction der Differentialgleichungen von der Form $r+Ss+Tt+U=0$.

Ich verstehe darunter die Aufgabe, diese Differentialgleichung durch Substitution auf eine der Formen

$$s=\varphi(x, y, z, p, q),\ r \text{ oder } t=\varphi(x, y, z, p, q)$$

zurückzuführen, jenachdem N_+ nicht gleich oder gleich N_- ist. Diese Aufgabe, mit der sich Ampère beschäftigt hat, ist bis jetzt nur in wenig Fällen gelöst*), und ich beabsichtige auch hier weiter nichts, als sie in diesem kurzen Abriss einer Charakteristikentheorie nicht zu übergehen, und eine für das folgende wichtige Bemerkung an ihre Besprechung zu knüpfen.

Wenn S und T nur x und y enthalten, ist die Reduction leicht. Ich nehme an, 1) $N_\pm$ sei nicht gleich $N_\mp$, und

$$\psi(x, y)=\xi,\quad \psi_1(x, y)=\eta$$

seien die Integrale der Gleichungen $dy=N_+dx$, $d_1y=N_-d_1x$, ξ und η die Integrationsconstanten. Führt man nun ξ und η statt x und y als neue Variabeln ein, und bezeichnet mit π, $\varkappa$ die ersten, mit ϱ, σ, τ die zweiten Differentialquotienten von z nach ξ und η, so ist:

---

*) Laplace hat diese Reduction, soviel ich weiss, zuerst, und zwar bei den linearen Differentialgleichungen mit constanten Coëfficienten angewandt. (*Journ. de l'Ec. Pol.* VIII. Band, §. 235: *Sur les Intégrales définies des équations à différences partielles.*)

Ich bemerke noch, dass Ampère die Reduction zur Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in solchen Fällen benutzt, wo die Differentialgleichungen der Charakteristiken eine integrabele Combination zulassen. Diese Untersuchung befindet sich in seiner Abhandlung (18tes Heft des *Journ. de l'Ec. polyt.*) im §. IV, dem wichtigsten seiner tiefsinnigen Arbeit.

$$\pi = p\,\frac{\partial x}{\partial \xi} + q\,\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\varkappa = p\,\frac{\partial x}{\partial \eta} + q\,\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\sigma = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + r\,\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial x}{\partial \eta} + s\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + t\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Nach dem Obigen ist aber $\dfrac{\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\frac{\partial x}{\partial \eta}} = -N_+$, $\dfrac{\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} = -N_-$. Dadurch wird der Ausdruck für σ:

$$\sigma = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial x}{\partial \eta}\left\{r + s(N_+ + N_-) + tN_+N_-\right\}$$

und wegen $S = N_+ + N_-$, $T = N_+N_-$ enthält diese Formel die gewünschte Reduction. Die Werthe der Differentialquotienten von x und y nach ξ und η folgen auf bekannte Weise aus den Gleichungen $\psi = \xi$, $\psi_1 = \eta$.

Wenn 2) $N_+ = N_- \equiv N$ ist, so lautet die zu reducirende Differentialgleichung:

$$r + 2Ns + N^2t + U = 0$$

und es sei

$$\psi\ (x, y) = \eta$$

das Integral der Differentialgleichung $dy = Ndx$. Statt der Variabeln x und y führen wir als neue Variabeln ξ und η ein, wo ξ mit x und y durch eine beliebige Gleichung verbunden ist, und bezeichnen, analog wie oben, mit π, $\varkappa$ die ersten, mit ϱ, σ, τ die zweiten Differentialquotienten von z nach ξ und η. Dann ist:

$$\pi = p\,\frac{\partial x}{\partial \xi} + q\,\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\varkappa = p\,\frac{\partial x}{\partial \eta} + q\,\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\varrho = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}\left\{r + 2Ns + N^2t\right\}$$

wegen $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{dy}{dx} = N$. Diese Formeln enthalten wiederum die verlangte Reduction.

In Betreff der Reduction der Gleichung $r + 2Ns + N^2t = U$ füge ich noch folgende Bemerkung hinzu. Nimmt man an, dass N alle Variabeln x, y, z, p, q enthalten kann, und die Differentialgleichungen der Charakteristiken lassen eine inte-

grabele Combination zu, welche das Integral $\psi(x, y, z, p, q) = \eta$ liefern mag: so kann man als neue Variabeln ξ und η einführen, wo nun ξ von x, y und so vielen Differentialquotienten von z, als man will, abhängen darf. Nur müssen aus den Ausdrücken für die Differentialquotienten π, $\varkappa$, ϱ die Differentialquotienten p, q, r, s, t eliminirt werden können; und da obendrein ϱ die zweiten Differentialquotienten von x nach ξ, und folglich die dritten von z enthält, so beschränkt diese letzte Forderung die Ausführbarkeit der Reduction. Hierüber, und über die Reduction der Gleichung $r+Ss+Tt+U=0$ auf die Form $s=\varphi$, wenn die beiden Schaaren von Differentialgleichungen der Charakteristiken jede eine integrabele Combination zulassen, s. Ampère l. c.

Um nun zum eigentlichen Gegenstande dieses §. zu kommen, betrachten wir wieder die Gleichung $r+2Ns+N^2t+U=0$ unter der Annahme, dass N und U alle Variabeln x, y, z, p, q enthalten können. Die Differentialgleichungen ihrer Charakteristiken für diese Variabeln sind:

$$dy = Ndx$$
$$dz = (p+Nq)dx$$
$$dp + Ndq + Udx = 0.$$

Wir können hier eine Projection der Charakteristiken willkürlich annehmen. Es sei z. B. $\psi(x, y) = \eta$ die Gleichung der xy Projection der Charakteristiken. Für einen bestimmten Werth von η liefern uns die obigen Gleichungen eine vonz wei Parametern abhängige Charakteristik, und denken wir uns diesen Parametern feste Werthe ertheilt, so erhalten wir durch Variation von η eine Schaar von Charakteristiken. Von dieser Schaar fassen wir jetzt ein Individuum ins Auge. Wir legen durch diese individuelle Charakteristik die Integraloberfläche, welche durch sie bestimmt ist (§. 94), und es leuchtet ein, dass die übrigen Charakteristiken dieser Integraloberfläche im Allgemeinen nicht mit der Schaar, deren Projection $\psi = \eta$ ist, zusammenfallen werden. Daraus geht klar hervor, dass gerade innerhalb dieser einen Charakteristik, und sonst im Allgemeinen nicht, die Differentialgleichung die Form $r = \varphi$ annehmen wird.

Wenn man also das Integral der Gleichung

$$r + 2Ns + N^2t + U = 0$$

in Reihenform erhalten will, und man wählt zur Ausgangskurve eine beliebige Charakteristik, so kann man das Integral der vorstehenden Gleichung entwickeln, als ob sie die Form $r = \varphi$ hätte, daher Behufs der Reihenentwickelung die Reduction als geschehen angesehen werden darf. Wenn ich mithin im Folgenden auf einige Eigenschaften der Gleichung $r = \varphi(x, y, z, p, q)$ zu sprechen komme, so wird das Vorgebrachte auch ohne Einschränkung von der Gleichung

$$r + 2Ns + N^2 t + U = 0$$

gelten, wo N und U von x, y, z, p, q abhängen dürfen.

Was die Reduction der Gleichung

$$r + Ss + Tt + U \equiv r + s(N_+ + N_-) + tN_+N_- + U = 0$$

betrifft, so hat es, sobald $N_\pm$ von p und q abhängt, seine Schwierigkeit, sie auch nur für eine Charakteristik $dy = N_\pm dx$ zu bewerkstelligen, weil, wie wir wissen, p und q längs der Charakteristik nicht variabel sind, die Schaar der Charakteristiken $d_1 y = N_- d_1 x$ also die als Ausgangskurve zu betrachtende Charakteristik $dy = N_+ dx$ nicht unter willkürlicher Neigung passiren darf. Dies darf sie nur dann, wenn in $N_\pm$ nur x, y vorkommen.

So viel über das Problem der Reduction der linearen Gleichungen. In den folgenden §§. werde ich mich noch mit der Gleichung $r = \varphi$, deren allgemeinere Rolle wir gegenwärtig kennen, beschäftigen.

§. 96.

Reihenentwickelung des Integrals der Gleichung $r = \varphi(x, y, z, p, q)$.

Die Charakteristiken dieser Differentialgleichung haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= constans \\ dz &= p\,dx \\ dp &= \varphi\,dx \\ dr &= \frac{d\varphi}{dx}dx \\ ds &= \frac{d\varphi}{dy}dx \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Charakteristik ist also hier jede Kurve, die in einer Ebene liegt, für welche y constant ist.

Differenziren wir die Gleichung $r = \varphi$ 1) gar nicht, 2) nach x, 3) nach y, 4) zweimal nach x, 5) nach x und y, 6) zweimal nach y, u. s. f., so enthalten die resultirenden Gleichungen ausser x, y, z, p, q:

$$\begin{array}{ll}
 & 1)\ r \\
\left\{\begin{array}{l} 2)\ r,\ s,\ \mathfrak{a} \\ 3)\ s,\ t,\ \mathfrak{b} \end{array}\right. & \\
\left\{\begin{array}{l} 4)\ r,\ s,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \overset{4}{\underset{0}{z}} \\ 5)\ r,\ s,\ t,\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \overset{4}{\underset{1}{z}} \\ 6)\ s,\ t,\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \overset{4}{\underset{2}{z}} \end{array}\right. & \\
 & 7)\ r,\ s,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \overset{4}{\underset{0}{z}},\ \overset{4}{\underset{1}{z}},\ \overset{5}{\underset{0}{z}}
\end{array}$$

etc.

Diese Gleichungen sind zu verwenden, um die Differentialquotionen $\overset{n}{\underset{m}{z}}$ durch x, y, z und die Differentialquotienten $\overset{n}{\underset{0}{z}}$ auszudrücken. Denn q folgt aus $r = \varphi$; s aus 2); t und $\mathfrak{b}$ aus 3) und 4); $\mathfrak{c}$ und $\overset{4}{\underset{1}{z}}$ aus 5) und 7); $\mathfrak{d}$, $\overset{4}{\underset{2}{z}}$ und $\overset{5}{\underset{1}{z}}$ aus 6), 8) und 11); u. s. f. Daher sind, unter der Bedingung, dass die Ausgangskurve eine Charakteristik sei, alle Coëfficienten der Reihe $\Delta z = p\Delta x + q\Delta y +$ etc. bestimmt.

Denken wir uns nun das Integral der Gleichung $r = \varphi$ in eine Reihe von der Form:

$$\Delta z = p\Delta x + q\Delta y + \frac{1}{2}\left\{r\Delta x^2 + 2s\Delta x\Delta y + t\Delta y^2\right\} + \text{etc.}$$

entwickelt, und zur Grenzkurve irgend eine Kurve $x = \psi(z)$, $y = \psi_1(z)$ gewählt. Dann ist:

$$pu + qv = 1,$$

wo $u = \frac{d\psi}{dz}$, $v = \frac{d\psi_1}{dz}$. Nun sollen, wie früher (§. 86), x, y und alle Coëfficienten p, q, r, s, t, ... als Funktionen von z ausgedrückt werden. Aus der Gleichung $pu + qv = 1$ folgt (§. 84) eine Schaar Gleichungen von der Form:

$$u^n\overset{n}{\underset{0}{z}} + nu^{n-1}v\overset{n}{\underset{1}{z}} + \text{etc.} + U^{(n)} = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad U$$

wo in $U^{(n)}$ nur Differentialquotienten bis zur $n-1$sten Ordnung incl. vorkommen. Betrachtet man nun das eingangs dieses §. gegebene Verzeichniss der durch Differentiation von $r=\varphi$ erhaltenen Differentialquotienten, so erkennt man alsbald, dass die durch Differentiation von $r=\varphi$ erhaltenen Gleichungen und die Gleichung U für die $n$te Ordnung n Gleichungen betragen, also eine zu wenig, um die Differentialquotienten zu bestimmen, deren die $n$te Ordnung $n+1$ hat. Mithin ist auch hier die Zurhülfenahme noch einer Gleichung:

$$L\,(x, y, z, p, q) = 0$$

nothwendig, und wir können den Grenzbedingungen wieder die Form:

$$p=U, \quad q=V$$

geben. Um z. B. die Coëfficienten des Gliedes dritter Ordnung der Reihenentwickelung $\Delta z =$ etc. zu bestimmen, findet man aus $p=U$, $q=V$ die Gleichungen:

$$u^2\mathfrak{a} + 2uv\mathfrak{b} + v^2\mathfrak{c} = U_2$$
$$u^2\mathfrak{b} + 2uv\mathfrak{c} + v^2\mathfrak{d} = V_2$$

und aus $r=\varphi$ folgt:

$$a = X + pZ + rP + sQ$$
$$b = Y + qZ + sP + tQ$$

u. s. f. für die Glieder höherer Ordnung.

Es kann also gar kein Zweifel sein, dass die eben angedeutete Reihenentwickelung ein Integral mit zwei willkürlichen Funktionen *) der Differentialgleichung $r=\varphi$ ist: die eine ist

---

*) Um gerade hier, wo es mir auf präcise Definition der willkürlichen Funktionen ankömmt, jede Dunkelheit zu beseitigen, mache ich darauf aufmerksam, dass die Grenzbedingung, der zufolge eine Integraloberfläche eine gegebene Kurve im Raume enthalten soll, stets nur einer willkürlichen Funktion bedarf, um erfüllt zu werden; obgleich die beiden Projectionen der Raumkurve scheinbar zwei willkürliche Funktionen in das Integral einführen: wie ich auch (§. 48) dem Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welches gewiss nur eine willkürliche Funktion enthalten kann, diese Form mit zwei willkürlichen Funktionen ertheilt habe. Dass zwei willkürliche Funktionen in einem Integral, die den beiden Projectionen einer Raumkurve entsprechen, immer auf die Durchschnittskurve der Integraloberfläche mit einer festen Oberfläche, z. B. eine Coordinatenebene, d. h. auf eine willkürliche Funktion zurückführbar sind, erkennt man sofort, wenn man bedenkt, dass der Inbegriff aller Kurven auf einer Integraloberfläche, die ja nach einer will-

die willkürliche Ausgangskurve, die andere die Neigung, unter der sie von der Integraloberfläche passirt wird, welche Neigung die Gleichung $L = 0$ bestimmt. Und dass dies Integral mit zwei willkürlichen Funktionen sich nicht zurückführen lässt auf jenes mit einer willkürlichen Funktion, bei dem die Ausgangskurve eine Charakteristik ist, dies werde ich durch folgende geometrische Betrachtung zur Anschauung bringen.

Man denke sich eine Ebene E, für die y constant ist und den Werth c hat. Jede Kurve auf der Ebene E ist eine Charakteristik der Gleichung $r = \varphi$. Durch E legen wir eine andere Ebene $\mathfrak{E}$, welche ebenfalls die z Richtung enthält und mit der Ebene E irgend einen endlichen, aber kleinen Winkel einschliesst.

Jede Kurve auf der Ebene E bestimmt eine (§. 94) durch sie gehende Integraloberfläche der Gleichung $r = \varphi$. Die zu einer gegebenen Kurve C auf der Ebene E gehörige Integraloberfläche mag die Ebene $\mathfrak{E}$ in der Kurve $\mathfrak{K}$ treffen. Und ich mache nun die Voraussetzung, die gewiss unanstössig sein wird: dass jede neue Kurve C eine neue Kurve $\mathfrak{K}$ bestimmt, d. h. dass allgemein zu reden, wenn C in $C + \delta C$ übergeht, $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K} + \delta\mathfrak{K}$ übergeht, wo $\delta\mathfrak{K}$ nicht verschwindet. Hieraus folgt aber unbedingt, dass wenigstens innerhalb eines bestimmten Gebietes auf der Ebene $\mathfrak{E}$ zu jeder gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ eine Charakteristik C gehört, deren zugehörige Integraloberfläche durch $\mathfrak{K}$ hindurchgeht. (Um sich die Richtigkeit dieses Schlusses ganz klar zu machen, muss man sich die Ebenen E und $\mathfrak{E}$ zunächst einander unendlich nahe denken, worauf man dann sieht, dass der Schluss auch für eine endliche hinreichend kleine Entfernung gelten muss.) Analytisch bedeutet dies: weil in der Gleichung der Integraloberfläche eine willkürliche Funktion vorkömmt, muss diese so bestimmt werden können, dass die Integraloberfläche durch eine beliebige Kurve auf der Ebene $\mathfrak{E}$ hindurchgeht. Es folgt noch hieraus als Corollar, dass die Integraloberfläche nicht etwa

kürlichen Funktion variiren, durch die eine Durchschnittskurve der Integraloberfläche mit der festen Oberfläche vertreten werden kann. Dagegen führt die Bedingung $L = 0$ längs der Grenzkurve eine zweite willkürliche Funktion in den Werth von z ein.

ausser von der Grenzkurve auf der Ebene E ($y=c$) noch von c abhängt, da alle zu E gehörigen Integraloberflächen auch die zu E_n gehörenden erschöpfen und umgekehrt. Nach diesen Bemerkungen ist klar, dass die obige Voraussetzung im Grunde genommen das, was bewiesen werden soll, voraussetzt. Wenn nämlich jede Kurve $\mathfrak{K}$ nur eine Kurve C bestimmt, so kann man durch eine Kurve $\mathfrak{K}$ nicht beliebig viele Integraloberflächen hindurchlegen, wie es doch die obige Reihenentwickelung gestattet, sondern durch eine Kurve $\mathfrak{K}$ kann nur eine Integraloberfläche gelegt werden, die unter den zu den Charakteristiken C gehörigen Integraloberflächen vertreten ist. Woraus hervorgeht, dass die Zahl der letzteren nicht gleich ist der Zahl der in der allgemeinen Reihenentwickelung enthaltenen Integraloberflächen, dass also das Integral mit zwei willkürlichen Funktionen nicht ohne Beschränkung seiner Allgemeinheit auf das mit einer willkürlichen Funktion zurückgeführt werden kann.

Wir haben nun bei den Differentialgleichungen von der Form $r=\varphi$ die Existenz zweier Klassen von Integralen kennen gelernt. Es ist aber hier noch nicht der Ort, deren Interpretation zu versuchen, also zunächst nachzusehen, ob die Reihen, durch welche die Integrale mit zwei willkürlichen Funktionen ausgedrückt, oder die polyedrischen Oberflächen, durch welche sie dargestellt werden, im Allgemeinen gegen Grenzen convergiren. Dagegen werde ich auf eine Bemerkung Poisson's über diesen Gegenstand*) eingehen, die er an die Reihenentwickelung des Integrals der Gleichung $r=q$ knüpft, und mit

---

*) An mehreren Orten u. a. *Ec. polyt.* 13. Heft, S. 107, ferner *Digression sur les équations aux différences partielles* in seinem *Traité de Mécanique* und seiner *Théorie de la chaleur*.

Auch Laplace giebt eine der Poisson'schen ähnliche Zurückführung der beiden Integrale auf einander, indem er von den bestimmten Integralen ausgeht (*Ec. Polyt.* 15. Heft, S. 238).

In demselben Sinne spricht sich Fourier aus (*Théorie de la chaleur, Section IV, comparaison des intégrales*, hauptsächlich S. 516 u. 517).

Die im Texte ausführlich dargelegte Schwierigkeit haben die oben erwähnten Geometer sämmtlich gefühlt, allein da sie sich besonders bemerklich macht, wenn man versucht, die Integrale geometrisch zu interpretiren, was jene Mathematiker nicht gethan haben, so erklärt es sich, dass sie mit der im Texte reproducirten Transformation Poisson's für erledigt hielten.

der mir das Problem noch keineswegs befriedigend gelöst zu sein scheint.

Indem er nämlich, wie wir im folgenden §. sehen werden, das Integral der Gleichung $r=q$ nach Potenzen von y entwickelt (d. h. nach den von uns angewandten Ausdrücken und Bezeichnungen Δx und y in $\Delta y=\eta-y$ gleich Null setzt, und zur Ausgangskurve eine Charakteristik wählt, für die $y=0$ ist) enthält die Reihe aus Gründen, die wir kennen, nur die willkürliche Funktion z von x. Entwickelt er aber nach x, d. h. wählt er zur Ausgangskurve eine Kurve, für die $x=0$ ist, so enthält das Integral zwei willkürliche Funktionen von y. Indem er darauf diese nach y entwickelt, gelingt es ihm zwar, beide Reihenentwickelungen zur Deckung zu bringen.

Da dies mit den bisherigen Resultaten in direktem Widerspruch steht, die Frage aber, weil sie eigentlich die ganze Klasse von partiellen Differentialgleichungen, für welche $N_+=N_-$, betrifft, von Wichtigkeit ist, so werde ich zum Zwecke späterer Lösung diesen Widerspruch schärfer formuliren.

§. 97.

Ueber die doppelte Reihenentwickelung des Integrals der Gleichung $r=q$.

Hat z der Differentialgleichung $r=q$ zu genügen, so findet man, jenachdem man es nach Potenzen von y oder von x mit Hülfe des Maclaurin'schen Satzes entwickelt:

$$z=z_0+\frac{d^2z_0}{dx^2}\,y+\frac{d^4z_0}{dx^4}\,\frac{y^2}{2}+\frac{d^6z_0}{dx^6}\,\frac{y^3}{3!}+\text{etc.} \qquad \text{I.}$$

$$z=z^0+p^0x+\frac{dz^0}{dy}\,\frac{x^2}{2}+\frac{dp^0}{dy}\,\frac{x^3}{3!}+\frac{d^2z^0}{dy^2}\,\frac{x^4}{4!}+\frac{d^2p^0}{dy^2}\,\frac{x^5}{5!}+\text{etc.}^{*}). \qquad \text{II.}$$

In z_0 ist y; in z^0, p^0 ist x gleich Null gesetzt zu denken.

---

*) Die Summen der beiden Reihen sind:

I. $$z=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\,(x+2u\sqrt{y})\,c^{-u^2}\,du$$

II. $$z=\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c^{ui}du}{\sqrt{c+ui}}\left\{\psi\left[y+\frac{x^2}{4(c+ui)}\right]+\frac{x}{2(c+ui)}\,\psi_1\left[y+\frac{x^2}{4(c+ui)}\right]\right\},$$

Gemäss dem Obigen hat man in der ersten Entwickelung nur die willkürliche Funktion z von x, von der die Gestalt der Charakteristik auf der Ebene $y=0$ abhängt. In der zweiten Entwickelung hat man zwei willkürliche Funktionen: z als Funktion von y oder die Gleichung der willkürlichen Ausgangskurve auf der Ebene $x=0$, und längs dieser Kurve die Funktion p von y, nämlich die Neigung, unter welcher die Integraloberfläche die Ausgangskurve passirt.

Die erste Reihenentwickelung giebt folgenden Werth von z für $x=0$:

$$z = \sum \frac{y^n}{n!} \overset{2n}{\underset{0}{z}} \; (x=0,\; y=0)$$

und für p:

$$p = \sum \frac{y^n}{n!} \overset{2n+1}{\underset{0}{z}} (x=0,\; y=0),$$

woraus gemäss der geometrischen Betrachtung des vorigen §. folgt, dass die willkürliche Funktion z von x für $y=0$ die Kurve bestimmt, in welcher die zu ihr gehörige Integraloberfläche die Ebene $x=0$ schneidet, und die Neigung, unter der dies geschieht. Die zweite Reihenentwickelung giebt, wenn man $x=0$ setzt, gar keine Bestimmung, weder für z noch für p. Es ist also schlechterdings unmöglich, dass die Reihenentwickelungen I. und II. dieselben seien, dass sie gleiche Allgemeinheit haben.

Poisson führt die zweite auf die erste zurück, wie folgt. Indem er in Reihe II

---

wo in I. $z_0=\varphi(x)$ ist und in II. $z^0=\psi_1(y)$, $p^0=\psi(y)$, $i=\sqrt{-1}$, c irgend eine reelle endliche Constante bedeutet, und γ durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c^{ui} du}{\sqrt{c+ui}}$$

bestimmt ist (Poisson, *Théorie de la Chaleur*, S. 148 u. ff.). Das Integral I, sowie überhaupt die Auflösung partieller Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale ist von Laplace (*Par. Mém.* 1779. u. a. a. O.) entdeckt. Das Integral I lässt sich durch ein unbestimmtes ersetzen (Poisson). Dass dies mit Integral II möglich sei, kann ich wegen einiger Schwierigkeiten, die sich bei dieser Transformation einstellen, nicht mit Bestimmtheit behaupten.

$$z^0 = a_0 + a_1 y + a_2 \frac{y^2}{2!} + \dots$$

$$p^0 = b_0 + b_1 y + b_2 \frac{y^2}{2!} + \dots$$

setzt, und daraus die Coëfficienten $\overset{n}{\underset{n}{z^0}}$ und $\overset{n+1}{\underset{n}{z^0}}$ als nach Potenzen von y steigende Reihen herleitet, kömmt zuerst:

$$z = \sum_0^\infty a_n \frac{y^n}{n!} + x \sum_0^\infty b_n \frac{y^n}{n!} + \frac{x^2}{2} \sum_1^\infty a_n \frac{y^{n+1}}{(n-1)!} + \frac{x^3}{3!} \sum_1^\infty b_n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \text{etc.}$$

Diese Reihe ist offenbar noch mit Reihe II identisch. Bringen wir sie aber in tabellarische Form:

$$\begin{array}{llllll} z = & a_0 & + a_1 \, y & + a_2 \frac{y^2}{2} & + a_3 \frac{y^3}{3!} & + \text{etc.} \\ & + b_0 x & + b_1 \, xy & + b_2 \frac{xy^2}{2} & + b_3 \frac{xy^3}{3!} & + \text{etc.} \\ & + a_1 \frac{x^2}{2} & + a_2 \frac{x^2 y}{2} & + a_3 \frac{x^2 y^2}{2.2} & + a_4 \frac{x^2 y^3}{2.3!} & + \text{etc.} \\ & + b_1 \frac{x^3}{3!} & + b_2 \frac{x^3 y}{3!} & + b_3 \frac{x^3 y^2}{3!\,2} & + b_4 \frac{x^3 y^3}{3!\,3!} & + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{array} \qquad \text{III.}$$

ordnen diese Doppelreihe nach Potenzen von y, und setzen:

$$\varphi(x) \equiv a_0 + b_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + b_1 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

so erhält sie die Form der Reihe I, und es kommt darin offenbar nur die eine willkürliche Funktion $\varphi(x)$ vor.

Poisson, dem es paradox schien, dass sich in der einen Reihenentwickelung nur eine, in der anderen zwei willkürliche Funktionen einstellten, hielt durch diese Transformation der Reihe II die Identität beider Reihen für nachgewiesen und damit die Schwierigkeit für beseitigt. Da wir indessen erkannt haben, dass die Reihen I und II wirklich verschieden sein müssen und es auch sind, insofern die eine unbestimmt lässt, was die andere bestimmt, und da wir wissen, dass dies alles der Theorie gemäss ist: so werden wir es vielmehr paradox finden, dass die Reihe III verschiedene Eigenschaften erhält, eine verschiedene Allgemeinheit gewinnt, jenachdem man sie nach Potenzen von x oder von y ordnet. Allein dieser Fall ist nicht ganz ohne Analogon. Es ist z. B. bekannt, dass eine Reihe, je nach ihrer Anordnung convergiren oder divergiren

kann, ja für verschiedene Anordnungen gegen verschiedene Grenzen convergiren kann. Und unter diese merkwürdigen Fälle ist meines Erachtens die POISSON'sche Transformation zu zählen.

Setzen wir noch in Reihe I

$$z_0 = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \text{etc.},$$

leiten daraus die Coëfficienten $\frac{d^{2n} z_0}{dx^{2n}}$ als nach Potenzen von x steigende Reihen her, bringen dann Reihe I in Tabellenform:

$$\left.\begin{array}{rlllll} z = & a_0 & + a_1\, x & + a_2 \frac{x^2}{2} & + a_3 \frac{x^3}{3!} & + \text{etc.} \\ & + a_2\, y & + a_3\, xy & + a_4 \frac{x^2 y}{2} & + a_5 \frac{x^3 y}{3!} & + \text{etc.} \\ & + a_4 \frac{y^2}{2} & + a_5 \frac{xy^2}{2} & + a_6 \frac{x^2 y^2}{2.2} & + a_7 \frac{x^3 y^2}{3!2} & + \text{etc.} \\ & + a_6 \frac{y^3}{3!} & + a_7 \frac{xy^3}{3!} & + a_8 \frac{x^2 y^3}{2.3!} & + a_9 \frac{x^3 y^3}{3!3!} & + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} & & & & \end{array}\right\} \text{IV.}$$

und ordnen sie endlich nach Potenzen von x, indem wir setzen:

$$\psi(y) = a_0 + a_2 y + a_4 \frac{y^2}{2} + \text{etc.}$$

$$\psi_1(y) = a_1 + a_3 y + a_5 \frac{y^2}{2} + \text{etc.},$$

so nimmt die Doppelreihe IV die Form der Reihe II an.

Während also in Reihe III die beiden Schaaren von Constanten:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$$

zur Herstellung der willkürlichen Funktion $\varphi(x)$ in eine zusammengefasst werden können, so kann man in Reihe IV, um die beiden willkürlichen Funktionen $\psi(y)$ und $\psi_1(y)$ zu gewinnen die eine Schaar:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

in die beiden Schaaren:

$$a_0,\ a_2,\ a_4,\ \ldots$$
$$a_1,\ a_3,\ a_5,\ \ldots$$

spalten. Es ist dies ein meines Wissens einzig dastehender Fall, in welchem die Entwickelung des Integrals einer Differen-

tialgleichung durch blosse Verstellung ihrer Glieder bald das allgemeine, bald ein besonderes Integral vorstellt; und gewiss ist es weniger seltsam, dass man die allgemeinere Reihe II durch die Transformation III in die Reihe I überführen könne, als dass I durch die Transformation IV in II übergeht.

Die Entwickelung des Integrals der Gleichung $r=q$ in Exponentialreihen ergiebt Gleiches.

§. 98.

Ueber die Reihenentwickelung des Integrals der Gleichung $r=q$ nach dem Taylor'schen Satze.

Behufs besserer Einsicht in diese Verhältnisse werde ich noch schliesslich drei Glieder der Reihenentwickelung von z nach dem Taylor'schen Lehrsatze angeben, wenn die Ausgangskurve in der Ebene $y=\alpha x$ liegt. Wir setzen dann:

$$y=\alpha x,\ y'=\alpha,\ y''=0,\ \ldots$$

$$z=\varphi\,(x),\ \frac{dz}{dx}\equiv z',\ \text{etc.}$$

$$p=\varphi_1(x),\ \frac{dp}{dx}\equiv p',\ \text{etc.}$$

Hieraus folgt nach § 86:

$$\begin{aligned}\Delta z &= p\Delta x+\Delta y\frac{z'-p}{\alpha}\\ &+\frac{1}{2}\left\{\Delta x^2\left(\frac{z'-p}{\alpha}\right)+2\Delta x\Delta y\left(\frac{p'}{\alpha}+\frac{z'-p}{\alpha^2}\right)+\Delta y^2\left(\frac{z''-2p}{\alpha^2}+\frac{z'-p}{\alpha^3}\right)\right\}\\ &+\frac{1}{3!}\left\{\Delta x^3\left(\frac{p'}{\alpha}-\frac{z'-p}{\alpha_2}\right)+3\Delta x^2\Delta y\left(\frac{z''-2p}{\alpha^2}+\frac{z'-p}{\alpha^3}\right)\right.\\ &+3\Delta x\Delta y^2\left(\frac{p''}{\alpha^2}+\frac{3p'-2z''}{\alpha^3}-\frac{z'-p}{\alpha^4}\right)\\ &\left.+\Delta y^3\left(\frac{z'''-3p''}{\alpha^3}+\frac{3z''-4p'}{\alpha^4}+\frac{z'-p}{\alpha^5}\right)\right\}+\text{etc.}\end{aligned}$$

Wir sehen erstlich, dass trotz der Einfachheit der Differentialgleichung und der Grenzbedingung das Gesetz der Reihe kein einfaches ist. Weniger complicirte Reihen erhält man aus der vorstehenden, wenn man Δx oder Δy gleich Null setzt, und solche Reihen sind es, welche sich zur Anwendung eignen.

Dann aber sehen wir, dass die Reihe sich auf die Form:

$$z=G_0+\frac{G_1}{\alpha}+\frac{G_2}{\alpha^2}+\text{etc.}$$

bringen lässt, d. h. z lässt sich nach fallenden Potenzen von α entwickeln. Der allgemeine Sinn dieser Bemerkung ist uns aus Capitel XV hinlänglich klar. Wir hatten dort (§. 87) gefunden, dass, wenn z einer partiellen Differentialgleichung $n$ter Ordnung zu genügen hat, seine Reihenentwickelung die Form $z = G_0 + G_1 + \ldots + \frac{G_n}{\mathfrak{R}_n^2} + \frac{G_{n+1}}{\mathfrak{R}_n^2} +$ etc. annimmt, wo die Exponenten von $\mathfrak{R}_n$ die in dem Gliede jeder Ordnung vorkommende höchste negative Potenz angeben, und es würde die Reihenentwickelung von z, wenn man nach fallenden Potenzen von $\mathfrak{R}_n$ ordnet, die Form:

$$z = G_0' + \frac{G_1'}{\mathfrak{R}_n} + \frac{G_2'}{\mathfrak{R}_n^2} + \text{etc.}$$

erhalten.

In der obigen Reihe ist nun $\alpha = \mathfrak{R}_2$ und man erkennt, wie sie für alle Lagen der Ebene $y = \alpha x$ einen Sinn hat, nur nicht wenn α verschwindet. Wird $\alpha = \infty$, so hätte man in der Reihe für z die Differentiale nach x in solche nach einer auf der Linie $y = \alpha x$ gemessenen Länge $l^2 = x^2 + y^2 = x^2 (1 + \alpha^2)$ zu verwandeln, worauf die Reihe auch für $\alpha = \infty$ Gültigkeit erlangen würde. Hat man die eben angegebene Transformation ausgeführt, und man setzt $\frac{1}{\alpha}$, Δy und x gleich Null, so folgt Reihe II. Setzt man aber in der allgemeinen Reihe $x = 0$, $y = 0$, $\xi = x$, $\eta = y$; so erhält man eine den Reihen III und IV analoge Reihe V, die aber die negativen Potenzen von α enthält, und welche auf die Form I nur gebracht werden kann, wenn man den Umweg über Reihe II macht, d. h. erst $\alpha = \infty$ setzt. Die Reihe V kann also nicht die Eigenschaft haben, bei der einen Anordnung ein allgemeines, bei der anderen ein besonderes Integral vorzustellen.

§. 99.

Kurze Uebersicht über den Inhalt dieses Capitels.

Giebt man dem allgemeinen Integral der partiellen Differentialgleichungen Reihenform, so wird es illusorisch, wenn die Grenzkurve in eine Charakteristik übergeht.

Die Gleichung $r = \varphi$ oder vielmehr, wie aus §. 94 hervor-

geht, alle Differentialgleichungen, bei denen $N_+ = N_-$ ist, haben die merkwürdige Eigenschaft, dass sie ein besonderes Integral besitzen, welches diese Lücke ausfüllt, indem es allein dadurch, dass es die Charakteristik passirt, vollkommen bestimmt ist, mithin nur eine willkürliche Funktion enthält. Man könnte es das »charakteristische Integral« nennen. Bei den partiellen Differentialgleichungen von der Form $r = \varphi(x, y, z, p, q)$ hat das allgemeine Integral übrigens der Form nach denselben Umfang, wie bei den übrigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, da es zwei willkürliche, von einander völlig unabhängige Funktionen enthält.

Im Gegensatz zu diesen Gleichungen sind bei den übrigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung längs der Charakteristik keine, oder nur die ersten, oder die ersten und zweiten, aber nie die dritten und höheren Differentialquotienten von z bestimmt, und die sie passirende Integraloberfläche bleibt daher im Uebrigen willkürlich.

Bemerkung I. Man kann zwar, wie ich glaube, nicht durch je zwei beliebige Charakteristiken N_+ und N_- einer Differentialgleichung $r + F = 0$ eine Integraloberfläche legen, ausser wenn N_+ und N_- keine Differentialquotienten von z enthalten; allein unter gewissen Bedingungen wird es stets möglich sein*). Dann wird, wie ich nicht bezweifle, durch die beiden Charakteristiken die Integraloberfläche bestimmt**). Stellt man sich nun vor, dass durch allmälige Variation der Form der Differentialgleichung $r+F=0$ die Differenz $N_+ - N_-$ immer kleiner werde, so sehen wir also, dass die Integraloberfläche bestimmt bleibt, auch wenn die Differenz $N_+ - N_-$ verschwindet, d. h. wenn die beiden Charakteristikenschaaren in eine zusammenfallen.

---

*) Denn diese Charakteristiken müssen sich im Allgemeinen schneiden, wenn sie Charakteristiken der Integraloberfläche sein sollen, und da sie nun jede für den Durchschnittspunkt die zugehörigen Grössen p, q, r, s, t bestimmen, so muss von den beiden Charakteristiken mindestens verlangt werden, dass beide Bestimmungen in Einklang stehen.

**) Ich kann diese Behauptung nicht beweisen. Allein es sprechen dafür allgemeine Betrachtungen, wie sie später beigebracht werden sollen, und dann Beispiele, z. B. die am Schluss dieses Hefts zur Sprache kommende Transformation der linearen Gleichungen nach der Riemann'schen Methode.

Bemerkung II. Bestimmt man hingegen eine Integraloberfläche irgend einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die Bedingung, dass sie durch zwei beliebige andere Kurven gehen soll, und man variirt das Gesetz dieser Kurven fortdauernd so, dass sie sich nähern und zuletzt zusammenfallen, so bleibt die Integraloberfläche bestimmt bis zu diesem Moment, auch wenn die Entfernung der Kurven noch so gering ist, wird aber unbestimmt, sobald die Kurven zusammengefallen sind.

Dies führt uns darauf, an die Stelle der einläufigen Grenzbedingung, welche die Integraloberfläche durch eine Grenzkurve und die Tangentialebene der Integraloberfläche längs der Grenzkurve bestimmt, folgende zu setzen: die Integraloberfläche ist bestimmt, wenn sie durch zwei gegebene Kurven gehen soll, diese mögen endlich entfernt sein (zweiläufige Grenzbedingungen) oder einander durchweg unendlich nahe verlaufen (einläufige Grenzbedingungen).

Diese Bemerkung vermittelt einen Uebergang zwischen beiden Arten von Grenzbedingungen.

Nachträge.

§. 100.

I. Zur Variation der Differentialgleichungen der Charakteristiken der Gleichung: $r + 2Ns + N^2 t + U = 0$.

Die Variation der Differentialgleichungen der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen, bei denen $N_+ = N_- \equiv N$ ist, ergab das unbedingte Verschwinden aller Variationen $\delta \overset{n}{\underset{m}{z}}$ längs der Charakteristiken. Es lässt diese Schlussfolgerung aber doch Ausnahmen zu, deren ich hier zwei erwähnen will.

1) Wenn wir die Differentialquotienten nach x und nach y der Differentialgleichung $p + F = 0$, wo F nur x, y, z, q enthält, bilden: den zweiten mit Q multipliciren und beide addiren, folgt die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$r + 2Qs + Q^2 t + X' + QY' = 0.$$

Eine jede Lösung der Gleichung $p+F=0$ ist ebenfalls eine Lösung der vorstehenden. Aber längs der Charakteristiken der Gleichung $p+F=0$, die nothwendigerweise auch Charakteristiken der eben aufgestellten Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, findet keine Bestimmung der Differentialquotienten von z von der zweiten Ordnung *incl.* an statt, und die $\delta \overset{n}{\underset{m}{z}}$ verschwinden nicht mit Ausnahme von δp und δq. Der analytische Grund, weshalb gerade die Gruppe der Charakteristiken der Gleichung $p+F=0$ unter den Charakteristiken jener Gleichung eine Ausnahme bildet, ergiebt sich bei Betrachtung der Differentialgleichungen der Charakteristiken zu leicht, um länger dabei zu verweilen.

2) Die Differentialgleichungen der Charakteristiken der Gleichung $r+2Ns+N^2t+U=0$ für die Variabeln r, s, t sind folgende:

$$dr+Nds+\left[2\frac{dN}{dx}(s+Nt)+Pr+Qs+X'\right]dx=0$$

$$ds+Ndt+\left[2\frac{dN}{dy}(s+Nt)+Ps+Qt+Y'\right]dx=0.$$

Von N nehme ich an, dass es nur x, y, z enthalte, daher ist $\frac{dN}{dx}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}+p\frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{dN}{dy}\equiv$ etc., ferner ist $P\equiv\frac{\partial U}{\partial p}$, $Q\equiv$ etc. Dann sieht man auf der Stelle, dass in beide Gleichungen die Grössen r, s, t nur in der Verbindung

$$r+Ns,\ s+Nt,\ d(r+Ns),\ d(s+Nt)$$

längs derjenigen Charakteristiken eingehen, für welche die Gleichung:

$$dN=(Q-PN)\,dx$$

stattfindet. Längs dieser werden auch blos die Grössen: $\delta r+N\delta s$, $\delta s+N\delta t$ verschwinden, und keineswegs die einzelnen Variationen δr, δs, δt, mithin die Variationen der höheren Differentialquotienten ebenfalls nicht.

Frägt man überhaupt, wie die Bedingung laute, vermöge deren in den variirten Differentialgleichungen der Charakteristiken der Gleichung $r+F=0$ für $N_+=N_-$ (§. 94) die Variationen sämmtlicher Differentialquotienten von z bis zu einer

beliebigen Ordnung nicht zu verschwinden brauchen, frägt man also nach den durch Elimination dieser Variationen sich ergebenden Gleichungen, so fällt man stets auf die nämliche: $dN = (Q - PN)\,dx$.

Bemerkung. Die Gleichung $dN = (Q - PN)\,dx$, welche durch Elimination der Differentiale übergeht in:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p + Nq)\frac{\partial N}{\partial z} + PN - Q = 0$$

kann auch vermöge einer geeigneten Beschaffenheit der Funktionen N und U identisch erfüllt werden. Dann muss nämlich sein:

$$U \equiv U' = p\left[\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p + Nq)\frac{\partial N}{\partial z}\right] + \psi\,(x, y, z, p + Nq),$$

wo N von x, y, z und ψ von x, y, z, $p + Nq$ auf beliebige Weise abhängen können.

Genügen nun N und U dieser Bedingung, so liefern die Differentialgleichungen der Charakteristiken vermöge der partiellen Differentialgleichung ein System von fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen, oder wenn man die beiden Aggregate $r + Ns$, $s + Nt$ durch $\frac{dp}{dx}$ und $\frac{dq}{dx}$ ersetzt, ein System von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen für x, y, z, p, q, von denen die eine zweiter Ordnung ist, so dass ihre Integrale fünf Constanten enthalten.

Corollar zur obigen Bemerkung. Wenn, wie in dem eben besprochenen Fall, die Differentialgleichungen der Charakteristiken der Gleichung $r + F = 0$ ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen bilden, und sie würden, wie dort, fünf Integrale mit den Grössen x, y, z, p, q, r, s von der Form:

$$\alpha_n = \psi_n(x, y, z, p, q, r + Ns),$$

liefern, so ist zur Auffindung der Integraloberfläche, welche eine Kurve $y_1 = \lambda(x_1)$, $z_1 = \lambda_1(x_1)$ enthält, und darin die Bedingung $\varphi\,(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$ erfüllt, folgendes Verfahren einzuschlagen. Man hat für einen Punkt in der Grenzkurve die Gleichungen:

$$\psi_n(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1 + N_1 s_1) = \psi_n(x, y, z, p, q, r + Ns)$$
$$r_1 + N_1 s_1 + N_1(s_1 + N_1 t_1) + U_1' = 0$$
$$y_1 = \lambda(x_1), \quad z_1 = \lambda_1(x_1), \quad \varphi = 0$$
$$p_1 u_1 + q_1 v_1 = 1$$
$$r_1 u_1 + s_1 v_1 = V_1$$
$$s_1 u_1 + t_1 v_1 = V_2.$$

Ich habe alle Variabeln an der Grenze der Deutlichkeit wegen mit dem Index I versehen, und die Grenzbedingungen sind dieselben, wie §. 86, so dass ich hier ihre Herleitung unterlassen darf.

Eliminirt man nun aus den fünf Integralen die Grössen p, q, $r + Ns$, so behält man zwei Gleichungen. Zu diesen zwei Gleichungen kommen noch die unter den Integralen $\psi_{1n} = \psi_n$ stehenden sieben Gleichungen hinzu, wodurch man im Ganzen neun Gleichungen erhält, in denen noch die zu eliminirenden acht Variabeln an der Grenze: x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 vorkommen. Durch Elimination dieser Variabeln folgt dann eine Gleichung, die nur x, y, z erhält, und die als das Integral der Gleichung $r + F = 0$ angesehen werden muss.

Wenn r, s, t in den Integralen nicht in der Verbindung $r + Ns$, $s + Nt$ vorkommen können, so müssen sechs Integrale vorhanden sein, um alle Variabeln an der Grenze und die Differentialquotienten von z im ganzen Gebiet der xy Werthe eliminiren zu können.

§. 101.

II. Ueber die Verschiedenheit der Ergebnisse bei der Variation der partiellen Differentialgleichungen selbst und der Differentialgleichungen ihrer Charakteristiken.

Diese zweite nachträgliche Bemerkung betrifft ein Bedenken, welches bei der Vergleichung früherer Entwickelungen (§. 21 und III. Abschn. Einl.) mit denjenigen dieses Capitels leicht entstehen kann. Es handelt sich um die verschiedenen Ergebnisse der Variation der partiellen Differentialgleichungen

und der Variation der totalen Differentialgleichungen ihrer Charakteristiken. Um also die Frage zu specialisiren, wissen wir einerseits aus §. 89, dass bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung die Variationen δp, δq längs der Charakterisiken verschwinden, andererseits fanden wir (III. Abschn. Einl.) die Differentialgleichung der Charakteristiken: $Pdy - Qdx = 0$ durch Variation von $F(x, y, z, p, q) = 0$, $pdx + qdy = dz$ nach p und q, und Elimination der Variationen δp, δq aus den Gleichungen: $P\delta p + Q\delta q = 0$, $\delta p dx + \delta q dy = 0$. Ebenso fanden wir (§. 21) die Gleichung $R_2 = 0$ durch Elimination von δr, δs, δt aus den Gleichungen $R\delta r + S\delta s + T\delta t = 0$, $\delta r dx + \delta s dy = 0$, $\delta s dx + \delta t dy = 0$, und §. 91 weisen wir nach, dass δr, δs, δt längs der Charakteristiken verschwinden.

Daraus folgt natürlich, dass die Variationen in beiden Fällen nicht dieselben Grössen sein können, und man hat nun nach dem Unterschied beider Gattungen von Variationen zu forschen. Für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zunächst lässt sich dieser Unterschied auf Grund der Kegeltheorie in sehr präciser Form darstellen.

Durch jeden Strahl des Strahlenbüschels der Integralkurven kann man (Grenzfälle ausgenommen) an den Polarkegel mindestens zwei Tangentialebenen legen. Mithin kann man durch eine willkürliche Grenzkurve stets mindestens zwei Integraloberflächen legen. Je kleiner der Winkel der Elemente der willkürlichen Kurve gegen den Polarkegel, desto kleiner ist der Winkel, unter dem sich die Integraloberflächen in der Grenze treffen. Verschwindet jener Winkel, so verschwindet auch dieser. Denken wir uns nun eine Kurve durch die Charakteristiken einer Integraloberfläche J gelegt, die sie allerwärts unter endlichem, aber sehr kleinen Winkel schneidet. Durch diese Kurve können wir also mindestens eine andere Integraloberfläche J_1 legen, welche J unter endlichem sehr kleinen Winkel schneidet. In der gemeinsamen Kurve bestimmen die Grössen p und q die Normale von J, und $p + \Delta p$, $q + \Delta q$ die Normale von J_1. Lassen wir den Winkel der transversalen Kurve mit den geschnittenen Charakteristiken unendlich klein werden, so gehen Δp und Δq in δp und δq über, und dies sind die Variationen des §. 21 und der Einleitung zum

III. Abschnitt, deren Elimination nach den Principien der Differentialrechnung die transversale Kurve an der Grenze, d. i. eine Charakteristik ergiebt. Dagegen sind in den Charakteristiken die Grössen p und q für alle sie passirenden Integraloberflächen dieselben, d. h. in der Charakteristik sind von einer Integraloberfläche zur andern δp und δq gleich Null, und dies sind die Variationen der §§. 89, 91, u. s. f.

Hiermit wäre die Schwierigkeit für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beseitigt. Aehnliche Betrachtungen gelten für die partiellen Differentialgleichungen der höheren Ordnungen. Ich werde auf diese Frage aber nur noch bei den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingehen, weil hier die Betrachtung eine kleine Veränderung erfährt, die sich dann bei den Differentialgleichungen höherer Ordnungen in ähnlicher Weise wiederholt.

Wir denken uns wieder die Integraloberflächen J, J_1 und die sich in einem Punkt kreuzenden Richtungen (a, b) einer Contactcharakteristik und (u, v) einer durch die Charakteristiken gelegten Kurve construirt. Setzen wir von vorne herein Δp und Δq gleich Null, so werden Δr, Δs, Δt endliche Werthe haben, die abermals gleichzeitig mit den Differenzen $a-u$, $b-v$ unendlich klein werden (in welchem Stadium ihre Elimination die Differentialgleichung $\mathfrak{R}_2 = 0$ der Contactcharakteristiken liefert) und für $a=u$, $b=v$ verschwinden. Um ein Bild zu gebrauchen, denke man sich, ein Kreis mit dem Halbmesser ϱ sei Berührungskreis der ebenen Kurve K in dem Punkt $\mathfrak{P}$, und es seien $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ zwei an beiden Seiten von $\mathfrak{P}$ und endlich davon entfernt auf der Kurve K gelegene Punkte. Lässt man nun den Kreis ϱ auf der Kurve K von $\mathfrak{P}_0$ nach $\mathfrak{P}_1$ rollen, so wird seine Berührung mit der Kurve K in dem Interwall $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}$ der Berührung der Integraloberflächen J und J_1 für endliche Werthe von $a-u$, $b-v$ entsprechen, und wenn der Kreis die Kurve im Punkt $\mathfrak{P}$ berührt, so entspricht dies dem Contact der Integraloberflächen in der Charakteristik $a=u$, $b=v$.

Setzt man aber Δp und Δq nicht gleich Null, so gestalten sich die Vorgänge verwickelter. Die Variationen können nicht

eliminirt werden, und es bedarf der Betrachtung des §. 94, um zu beweisen, dass sie in der Contactcharakteristik verschwinden.

Wir sind in den bisherigen Abschnitten bemüht gewesen, Theorie der Charakteristiken darzulegen mit geringer Abweichung unter Zugrundelegung der von Monge gegebenen Definition dieser Kurven, welche ich §. 4 mitgetheilt habe. Allein ich glaube, die wahre Bedeutung der Charakteristiken ist eine ganz andere, und diese Bedeutung verleiht ihnen eine Wichtigkeit für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, welche keine Anstrengung, um ihre Eigenschaften näher zu erforschen, überflüssig erscheinen lässt. Man wird vermöge der neuen Definition erkennen, dass die Charakteristiken in der innigsten Beziehung stehen zu der Natur der durch die partiellen Differentialgleichungen bestimmten Funktionen. Und es soll im nächsten Capitel meine Aufgabe sein, diese wahre Bedeutung der Charakteristiken auseinander zu setzen.

XVII. Bei den partiellen Differentialgleichungen sind Charakteristiken die spontanen Grenzen der Integraloberflächen.

In diesem Capitel werde ich das im Titel ausgesprochene Princip erläutern. Ich muss aber von vorneherein die Nachsicht des Lesers in Anspruch nehmen, wenn dies jetzt nur andeutungsweise und ohne strenge Beweisführung geschieht. Der Zweck der folgenden Seiten ist nicht eine vollendete Theorie aufzustellen, sondern vorerst nur den Weg anzugeben, den ich bei der ferneren Untersuchung eingeschlagen habe. Die genauere Begründung des Einzelnen nach dem von mir benutzten geometrisch synthetischen Verfahren würde, wenn in diese kurze Darstellung verflochten, sie nur unklar und schleppend machen, während die Richtigkeit der aufzustellenden Behauptungen evident erscheinen wird, sobald wir, dem naturgemäs-

sen Gange der Untersuchung folgend, tiefer in die Theorie eingedrungen sein werden.

§. 102.

Einiges über die ältere Definition der Charakteristiken, und Erörterung einiger Grundbegriffe: über Bestimmtsein der Integraloberfläche, spontane Grenzen, etc.

Der Monge'schen Definition gemäss ist unter Charakteristik die Kurve zu verstehen, gegen welche die Schnittlinie zweier unendlich wenig von einander verschiedenen Oberflächen convergirt, wenn der Unterschied der Gestalt beider Oberflächen verschwindet. Um über die Beschaffenheit dieser Kurven in einem bestimmten Falle näheren Aufschluss zu erhalten, habe ich (Kap. IX) unter dem Namen »Grenzschnittlinie« die Durchschnittslinien der Kegelflächen betrachtet. Erinnern wir uns an die Ausführungen des c. Kap., so sehen wir leicht ein, dass der ältere Begriff der Charakteristik oder Grenzschnittlinie nicht wesentlich mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zusammenhängt, vielmehr ein rein geometrischer ist. Die neuere Definition der Charakteristik als spontane Grenze der Integraloberfläche macht dagegen aus der Betrachtung dieser Kurven einen integrirenden Bestandtheil jener Theorie, wie ich dies, nach vorgängiger Erörterung wichtiger Grundbegriffe, zeigen werde.

Wir haben in dem Kap. XV gesehen, dass die Integraloberfläche einer partiellen Differentialgleichung $n$ter Ordnung bestimmt ist, wenn sie eine gegebene Kurve enthalten soll, und in dieser Kurve alle Differentialquotienten von z nach x und y bis zu den $n-1$sten *incl.* gegeben sind. Das Gesetz der Grenzkurve war ein willkürliches. Nimmt man nun an, dass von der Grenzkurve nur ein endliches Stück und längs dieses Stückes alle partiellen Differentialquotienten von z bis zur $n-1$sten Ordnung gegeben seien, so fragt es sich zunächst ob dieses endliche Stück überhaupt eine Integraloberfläche bestimmt, dann ob es ein endliches Stück davon bestimmt, und endlich, wenn dies der Fall ist, welches die Begrenzung dieses endlichen Oberflächenstückes sei.

Um diese Fragen beantworten zu können, müssen wir uns

erst darüber klar werden, was man unter Bestimmtsein der Integraloberfläche zu verstehen habe.

Ich glaube man kann sagen: eine gewisse Grenzbedingung bestimmt das Integral, wenn man mit ihrer Hülfe eine oder mehrere Integraloberflächen construiren kann, die ursprünglich, wie bei einer jeden derartigen Construction, aus endlichen Elementen zusammengesetzt, beim Uebergang zur Grenze gegen eine oder mehrere um ein Endliches von einander verschiedene stetige Integraloberflächen convergirt. Eine übrigens zur Individualisirung der Integraloberfläche genügende Grenzbedingung wird nämlich auch mehrere oder unendlich viele Integraloberflächen bestimmen können, wie dies z. B. bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung stattfindet, wenn die Directrix des Normalenkegels eine Kugelspirale ist: und doch wird man von einem Bestimmtsein der Integraloberfläche reden dürfen; nur muss die Grenzbedingung nicht zur Construction einer Schaar stetig in einander übergehender Integraloberflächen dienen können. Wiewohl auch hier noch zu unterscheiden wäre ob diese Schaar vermöge eines willkürlichen Parameters oder einer willkürlichen Funktion variirt. Danach hätte man also noch Grade der Bestimmung des Integrals zu statuiren, worauf ich indess nicht weiter eingehen will. Eine einläufige Grenzbedingung bestimmt dann eine Integraloberfläche, werden wir sagen, wenn sie zunächst eine ihr unendlich nahe verlaufende zweite Grenzbedingung bestimmt, diese eine dritte, u. s. f., so dass der Ort der successiv construirten Grenzen gegen eine stetige Integraloberfläche convergirt.

Wenn nun ein endliches Stück einläufiger Grenzbedingung zur Construction gegeben ist, und die Construction, von der angenommen wird, dass sie vollkommen richtig sei, liefert beim Grenzübergang auch ein, gleichgültig ob nach allen Richtungen oder nur nach einigen, begrenztes Stück Integraloberfläche, und wenn keine Construction möglich ist, die ein grösseres Stück davon lieferte, so sollen die Grenzen dieses Stückes Integraloberfläche, insofern es nicht die zur Construction dienende Kurve selbst, oder Rückkehrkanten oder dergl. sind, die »spontanen Grenzen« der Integraloberfläche genannt werden.

§. 103.

Allgemeine Construction von Integraloberflächen.

Was nun die Construction der Integraloberflächen betrifft, so lässt sie sich natürlich nach sehr mannigfaltigen Methoden ausführen. Allein bei allen Methoden ist ein sehr wichtiger Punkt zu berücksichtigen, auf den man zuerst aufmerksam wird, wenn man sich die Aufgabe stellt, ein endliches Stück Integraloberfläche zu construiren. Deshalb kann man geradezu sagen, dass alle bisherigen Constructionen, diejenige der Integraloberflächen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche ich in diesem Hefte §. 67 mitgetheilt habe und die Construction der §§. 17 und 18 ausgenommen, ungenügend sind. Wir werden weiter unten sehen, weshalb. Zuerst werde ich ein allgemeines Constructionsverfahren der partiellen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung andeuten, um daran die ferneren Bemerkungen zu knüpfen.

Statt der einläufigen Grenzbedingung, nach welcher zur Construction die Differentialgleichung $\overset{n}{\underset{0}{z}}+F=0$, eine Kurve K und längs dieser Kurve sämmtliche Differentialquotienten von z bis zur $(n-1)$sten Ordnung *incl.* oder wenn man will die Tangirende $(n-1)$sten Grades (§. 89) gegeben sind; statt dieser Grenzbedingung, kann man die $n$läufige einführen, nach welcher die Integraloberfläche n gegebene Kurven enthalten muss, und ähnlich, wie §. 99 für zweiläufige Grenzbedingungen mitgetheilt, geht die $n$läufige in die einläufige über, wenn man die n Kurven sich nähern lässt, bis sie einander unendlich nahe verlaufen, jedoch natürlich so sich nähern lässt, dass man eine beim Grenzübergang stetige Oberfläche durch sie hindurchlegen kann. Wir wollen also als Grenzbedingung annehmen, es seien n Kurven: K_1, K_2, ... K_n gegeben, von denen K_2 unendlich nahe K_1; K_3 unendlich nahe K_2; u. s. f. verläuft, und zwar in der Weise, dass die Abwickelbare, die durch K_1 und K_2 *) gelegt wird, mit der Abwickelbaren K_2, K_3 überall einen Winkel von der Ordnung der Entfernung der Kurven K_1, K_2 von einander einschliesst. K_1 kann man als die gegebene

*) Mit dieser Abwickelbaren ist die Hülle der successiven Lagen einer auf K_1 und K_2 rollenden Ebene gemeint.

Kurve, $K_2 \ldots K_n$ als die Differentialquotienten von z längs der gegebenen Kurve vertretend ansehen. Um aber die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir ferner annehmen, die Kurven K seien eben und auf Ebenen gelegen, in denen y constant ist. Man wird übrigens die partielle Differentialgleichung immer so transformiren können, dass die Kurven K eben werden. Man braucht nur die Kurven, als zu einer Schaar mit dem Parameter α gehörig, anzunehmen, und dann statt x und y neue Variabeln einzuführen: nämlich erstens α, durch die y Coordinate des Durchschnittspunktes der Kurven K mit der yz Ebene ausgedrückt, zweitens die rectificirte Länge der Kurven K von jenem Durchschnittspunkt an gemessen.

Dies vorausgeschickt, seien also auf n der xz Ebene parallelen, in unendlich kleinen Distanzen auf einander folgenden Ebenen $E_1, E_2 \ldots E_n$ die n Kurven $K_1 \ldots K_n$ gegeben, und es sei, denkt man sich irgend zwei Ebenen E_p und E_{p+1} in eine zusammengeschoben, die sich dabei ergebende Distanz der Kurven K_p und K_{p+1} nirgends von einer niederen Ordnung als die Ordnung der Entfernung von E_p und E_{p+1} vor ihrer Annäherung. Die Durchschnittspunkte einer Schaar $E', E'', \ldots E^{(m)}$ von der yz Ebene parallelen Ebenen mit den Kurven K wollen wir dem Algorithmus des §. 64 gemäss bezeichnen, und es sei also $\mathfrak{P}_p^{(q)}$ der Durchschnittspunkt der Kurve K_p mit der Ebene $E^{(q)}$.

Wir wollen nun untersuchen ob wir mit Hülfe der Coordinaten der Punkte $\mathfrak{P}_p^{(q)}$, wo p zwischen 1 und n liegt, auf der Ebene E_{n+1} die Punkte $\mathfrak{P}_{n+1}^{(q)}$ construiren können, und wieviel solcher Punkte man erhalten würde, wenn q zwischen 1 und m liegt.

Die Projectionen irgend zweier benachbarten Punkte $\mathfrak{P}$, wie in §. 64 bezeichnet, übersieht man sofort, dass

1) $\overset{n}{\underset{o}{z}}$ ein Aggregat ist aus den Differenzen:

$$d_1 z_1,\ d_1 z_2,\ \ldots\ d_1 z_n,\ d_1 x_1,\ d_1 x_2,\ \ldots\ d_1 x_n$$

2) $\overset{n}{\underset{n}{z}}$ ein Aggregat ist aus den Differenzen:

$$dz',\ dz'',\ \ldots\ dz^{(n)},\ dy',\ dy'',\ \ldots\ dy^{(n)}$$

3) $\overset{n}{\underset{q}{z}}$ ein Aggregat ist aus Differenzen d und d_1, welche in das Rechteck $\mathfrak{P}_1{}' \mathfrak{P}_1^{(n-q+1)} \mathfrak{P}_{q+1}^{(n-q+1)} \mathfrak{P}_{q+1}'$ gehören.

Wir werden annehmen, dass die partielle Differentialgleichung $n$ter Ordnung den Differentialquotienten $\overset{n}{\underset{n}{z}}$ enthält, und können dies unbeschadet der Allgemeinheit gegenwärtiger Betrachtung um so eher, da dieser Differentialquotient durch Veränderung der Variabeln immer in die Differentialgleichung eingeführt werden kann. Die hervorzuhebenden Momente gewinnen aber durch die Vereinfachung, welche obige Annahme mit sich bringt, an Klarheit.

Gegeben sind alle Differenzen innerhalb des Rechtecks $\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_n' \mathfrak{P}_1^{(m)} \mathfrak{P}_n^{(m)}$. Dies berücksichtigt, ist dz_n durch die Differentialgleichung bestimmt, wenn man dy_n nach Willkür annimmt, also ist der Punkt $\mathfrak{P}'_{n+1}$ bestimmt. Genau so bestimmt man mit Hülfe der gegebenen Grössen und der Differentialgleichung den Punkt $\mathfrak{P}_{n+1}^{(2)}$ u. s. f., so dass die Kurve K_{n+1} auf der Ebene E_{n+1} vom Punkt $\mathfrak{P}'_{n+1}$ bis zum Punkt $\mathfrak{P}_{n+1}^{(m-n)}$ punktweise construirt ist.

§. 104.

Die gewöhnlichen Constructionen sind, wie die des vorigen §, ungenügend.

Aus dieser Construktion folgt zweierlei: Erstens sehen wir, dass die Kurven $K_1 \dots K_n$ allerdings eine neue Kurve K_{n+1} bestimmen, dass man daher mit Hülfe der Kurven $K_2 \dots K_{n+1}$ eine fernere Kurve K_{n+2} muss construiren können, u. s. f. Der Ort der Kurven K_1 ... *in inf.* wird eine Integraloberfläche sein.

Zweitens erkennen wir, dass, wofern die Kurve K_1 begrenzt ist, (in unserer Construction ist sie es und erstreckt sich vom Punkt $\mathfrak{P}_1'$ zum Punkt $\mathfrak{P}_1^{(m)}$) auch die Integraloberfläche Grenzen hat, und zwar ist dies einerseits ihre Schnittlinie mit der Ebene E', andererseits eine Kurve, welche die Punkte: $\mathfrak{P}_{n+1}^{(m-n)}$, $\mathfrak{P}_{n+2}^{(m-n-1)}$, ... verbindet, und welcher wir hier aus Gründen, die sofort erhellen werden, keine Beachtung schenken wollen.

Das erstere Ergebniss, dass man mit Hülfe der $n$fachen Grenzkurve eine Integraloberfläche der Differentialgleichung $n$ten Grades construiren könne, ist ganz in der Ordnung und

stimmt sowohl mit dem Ergebniss der allgemeinen Reihenentwickelung des §. 87 wie mit den bekannten Constructionen der Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung überein.

Die zweite Folgerung dagegen, dass die Ebene E' die Integraloberfläche, welche durch das bei $\mathfrak{P}_1'$ beginnende Stück der Kurve K_1 bestimmt wird, begrenzt, also so zu sagen den Umfang des Einflusses der Kurve K_1 nach der einen Seite hin abschliesst — diese Folgerung ist auf den ersten Blick bedenklich, bei genauerer Betrachtung aber falsch. Wir können nämlich ganz ohne Schwierigkeit statt dieser spontanen Grenze irgend eine andere herausconstruiren, wenn wir statt der Ebenen $E^{(q)}$ beliebige auf der xy Ebene senkrecht stehende Cylinderflächen zur Construction benutzen. Denn die Differentialquotienten $\overset{n}{\underset{q}{z}}$ lassen sich stets durch die Differenzen d und d_1 ausdrücken, wenn mit diesen Zeichen wieder die Projectionen der Entfernungen der Durchschnittspunkte der Cylinderflächen mit den Kurven K angegeben werden. Die Richtigkeit dieser Bemerkung leuchtet zwar bei einiger Ueberlegung sofort ein. Grösserer Evidenz wegen, werde aber ich eine ganz ähnliche Construction im einfachsten Falle der Differentialgleichungen erster Ordnung strenger durchführen.

§. 105.

Eine einfache Construction zum Beleg der Schlüsse des vorigen §.

Für einen Punkt $\mathfrak{P}_1'$ construiren wir die Tangentialebene (p_1', q_1'). Hier bedeuten p_1' und q_1' die negativen Neigungstangenten des Loths an die Tangentialebene, und diese ist irgend eine Tangentialebene des für den Punkt $\mathfrak{P}_1'$ als Spitze construirten Polarkegels. Auf der Tangentialebene gehen wir längs der Richtung (u_1', v_1') zum Punkt $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ über; für welchen die Ebene (p_2', q_2') construirt wird, auf der wir in der Richtung (u_2', v_2') zum Punkt $\mathfrak{P}_3'$ gelangen, u. s. f. So entsteht eine erste polygonale Kurve: $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \mathfrak{P}_3' \ldots$ Nun gehen wir auf der Ebene (p_1', q_1') vom Punkt $\mathfrak{P}_1'$ in der Richtung $(\mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1')$ zum Punkt $\mathfrak{P}_1''$ über; auf der Ebene (p_2', q_2') in der Richtung $(\mathfrak{u}_2', \mathfrak{v}_2')$ zum Punkt $\mathfrak{P}_2''$ über; auf der Ebene (p_3', q_3') in der Richtung $(\mathfrak{u}_3', \mathfrak{v}_3')$

zum Punkt $\mathfrak{P}_3''$ über; u. s. f. So entsteht eine zweite polygonale Kurve: $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{P}_2''$, $\mathfrak{P}_3''$, ... Zu dieser construiren wir, genau so wie wir sie aus der ersten gefunden haben, eine dritte polygonale Kurve $\mathfrak{P}_1'''$, $\mathfrak{P}_2'''$, $\mathfrak{P}_3'''$, ...; u. s. f. *in infin.*

Wir haben dann zwei sich kreuzende Schaaren von polygonalen Kurven erhalten, nämlich

1) $\mathfrak{P}_1^{(n)}$, $\mathfrak{P}_2^{(n)}$, $\mathfrak{P}_3^{(n)}$ .... oder $K^{(n)}$.

2) $\mathfrak{P}_n'$, $\mathfrak{P}_n''$, $\mathfrak{P}_n'''$ .... oder K_n.

Die Construction ist vollkommen symmetrisch in Bezug auf beide Kurvenschaaren, oder einfacher in Bezug auf die beiden Grenzkurven K_1 und K'. Mit andern Worten, es ist gleichgültig, ob man die erste Folge von Punkten oder die zweite zuerst construirt.

Die sich kreuzenden Schaaren von polygonalen Kurven bilden gebrochene Facetten, und zwar liegt an dem Punkt $\mathfrak{P}_m^{(n)}$ vom Punkt $\mathfrak{P}_1'$ am meisten abgewendet die Facette $\mathfrak{P}_m^{(n)}\,\mathfrak{P}_{m+1}^{(n)}\,\mathfrak{P}_{m+1}^{(n+1)}\,\mathfrak{P}_m^{(n+1)}$, die man als aus den Bruchflächen $\mathfrak{P}_m^{(n)}$, $\mathfrak{P}_{m+1}^{(n)}$, $\mathfrak{P}_m^{(n+1)}$ und $\mathfrak{P}_{m+1}^{(n)}$ $\mathfrak{P}_{m+1}^{(n+1)}$ $\mathfrak{P}_m^{(n+1)}$ zusammengesetzt anzusehen hat. Die erste Bruchfläche ist die Ebene $(p_m^{(n)}, q_m^{(n)})$ und beide Bruchflächen stossen aneinander unter einem Winkel von der Ordnung der Seiten der Facette, die natürlich von gleicher Ordnung gedacht sind.

Bei dieser Construction erkennt man nun auf das deutlichste, dass, wenn die eine der Kurven K_1, K' als vom Punkt $\mathfrak{P}_1'$ an gegebene Grenzkurve angesehen wird, die andere unmöglich gegen die spontane Grenze der Integraloberfläche convergiren kann, denn jedenfalls bleibt eine ihrer Projectionen willkürlich, und dies würde keinen Sinn haben. Ausserdem kennen wir aber bereits die spontanen Grenzen der Integraloberflächen bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung: es sind hier nämlich die Integralcharakteristiken, da man mit zwei Elementen willkürlicher Kurve einen Integralstreifen und weiter nichts, mit einem dritten Element einen zweiten Integralstreifen, u. s. f. construiren kann.

Wir schliessen also erstens, dass die eben ausgeführte Construction zur Auffindung der spontanen Grenze nicht dient.

Ferner, da wir wissen, dass der Einfluss der Kurve K_1 sich nicht über eine gewisse den Punkt $\mathfrak{P}_1'$ passirende Integralcharakteristik hinaus erstreckt, unsere Construction aber an diese Grenze sich nicht kehrt, so müssen wir annehmen, entweder dass wir so eben zwei verschiedene Integraloberflächen construirt haben, die, durch irgend eine gemeinsame Bedingung immerhin verbunden, doch nothwendig beide die Charakteristik $\mathfrak{P}_1'$ zur spontanen Grenze haben, oder dass obige Construction überhaupt keine beim Grenzübergang stetige Integraloberfläche liefert, dass sie divergent sei.

Da nun alle mir bekannten Constructionen*) die nämliche Unvollkommenheit zeigen, erheischt die synthetische Behandlung der Frage, welches die spontanen Grenzen der Integraloberfläche seien, eine tiefere und genauere Untersuchung, die wir, ihre allgemeine Beantwortung im Auge, wieder am besten an die Betrachtung der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung anknüpfen werden. Vorher wird es aber gerathen sein, die Beantwortung der Frage wenigstens im Grossen und Ganzen durch geeignete Raisonnements zu versuchen, um der geometrischen Untersuchung die richtige Bahn vorzuzeichnen.

Ermittelung der spontanen Grenzen der Integraloberflächen.

§. 106.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

1) Lineäre. Die Grenzkurve K erstreckt sich vom Punkt $\mathfrak{P}_0$ bis zum Punkt $\mathfrak{P}_1$. Die Integraloberfläche ist der Ort der Charakteristiken, welche die Kurve K passiren und ihre spontanen Grenzen sind die Charakteristiken, welche die Punkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ enthalten. (§. 16.)

2) Nichtlineäre. Die Integraloberfläche ist der Ort derjenigen Integralcharakteristiken, welche die Kurve K passiren, und bei ihrem Durchgang durch diese Kurve von der gemeinsamen Tangentialebene der Kurve und des Polarkegels, dessen Spitze auf der Kurve liegt, berührt werden. Die spontanen

*) Mit Ausnahme der eingangs §. 103 citirten Constructionen von Integraloberflächen in diesem Hefte.

Grenzen sind diejenigen unter diesen Charakteristiken, welche die Punkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ enthalten. (Abschnitt IV.)

§. 107.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Vorbemerkung.

1) Das hierher gehörige System:

$$up+vq=1$$
$$\mathfrak{u}p_1+\mathfrak{v}q_1=1.$$

In diesem System sind z, z_1 abhängige, x, y unabhängige Variabeln; p, q; p_1, q_1 die partiellen Differentialquotienten von z und z_1 nach x und y; die Grössen u, v; $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ Funktionen der Variabeln x, y, z, z_1. Wir wissen aus §. 17 und 18, dass man durch zwei conjugirte Kurvenstücke, die sich beide von den conjugirten Punkten $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_0'$ bis zu den conjugirten Punkten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_1'$ erstrecken, zwei dreieckige Stücken Integraloberfläche legen kann, deren spontane Grenzen gemeinschaftliche Projectionen haben: die Projectionen derjenigen Charakteristiken der beiden conjugirten Integraloberflächen, welche die Punkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1'$ oder $\mathfrak{P}_0'$ und $\mathfrak{P}_1$ (die Projectionen müssen sich nämlich schneiden) passiren.

2) Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Allgemeinen. Wir haben diese Differentialgleichungen in solche mit reellen und in solche mit imaginären Charakteristiken getheilt, jenachdem die Grösse $\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - 4\,\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t} \equiv W$ wesentlich positiv oder wesentlich negativ war. Um diese Unterscheidung behufs der nachfolgenden Untersuchungen genauer durchzuführen, bemerke ich, dass man eigentlich nicht die Differentialgleichungen, sondern die Integraloberflächen nach dem Vorzeichen von W in Klassen einzutheilen hat. Denn abgesehen davon, dass die Grösse W in den gleich näher anzugebenden Fällen wesentlich positiv oder negativ ist, kann sie ihr Zeichen von einer Gegend des Raumes zur andern, auch auf einer Integraloberfläche wechseln.

Es sei zunächst W eine Function von x, y, z allein. Dann trennt, allgemein zu reden, die Oberfläche $W=0$ den Raum in Partieen, wo W positiv, und in solche wo W negativ ist. (W kann

beim Durchgang durch die Fläche $W=0$ auch sein Zeichen behalten). In denjenigen Theilen des Raumes, wo W negativ ist, werden die Integraloberflächen keine Contactcharakteristiken haben, und wenn eine Oberfläche vom positiven Raum, durch $W=0$ hindurch, in den negativen sich erstreckt, so reichen ihre Charakteristiken nur bis zur Schnittlinie der Integraloberfläche und der Oberfläche $W=0$. Ist ferner z. B. $W=p$, so wird es negativ, sobald die z Ordinate der Schnittlinie der Integraloberfläche mit einer Ebene, für die y = *constans* ist, bei zunehmendem x abnimmt, ein Fall, der allerwärts im Raume stattfinden kann: und dies rechtfertigt die Bemerkung, dass wir die Integraloberflächen nach dem Zeichen von W einzutheilen haben.

Was die Differentialgleichungen betrifft, bei denen W sein Zeichen beibehält, so steht mit stets reellen Charakteristiken obenan die Klasse:

$$F(x, y, z, p, q, s, ur-vt) = 0,$$

wo u und v stets positive Funktionen bezeichnen, also z. B. die Differentialgleichungen, bei denen einer der äusseren zweiten Differentialquotienten r, s, t fehlt. Stets negativ ist W u. a., wenn F nur x, y, z, p, q, $ur+vt$ enthält, u. s. f.

Von den Klassen von Differentialgleichungen, bei denen W stets positiv oder stets negativ, oder wechselnden Vorzeichens ist, sondert sich ab die Klasse, bei der W stets Null ist. Diese hat eigenthümliche Eigenschaften, die wir zum Theil schon kennen, und welche gänzlich abweichend sind von denen der übrigen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Bezüglich des Folgenden ist nun vorauszuschicken, dass die Untersuchung vorläufig gar nicht auf die Differentialgleichungen mit negativem W eingeht, und dass die zu findenden Resultate auf sie keinerlei Bezug haben. Man wird daher, bevor man diese Resultate anwendet, jedesmal das Vorzeichen von W prüfen müssen.

Von grossem Interesse ist die Untersuchung der Art, wie die Charakteristiken auf der Integraloberfläche an der Stelle, wo W sein Zeichen wechselt, ein Ende nehmen.

Damit ist gemeint, was folgt. Betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades:

$$\frac{dy}{dx} = u \pm w^{\frac{1}{2}},$$

wo u und w von x und y abhängen. Die durch diese Differentialgleichung definirte Kurvenschaar bedeckt einen Theil der xy Ebene. Der übrige Theil ist der Ort von Punkten, in denen $\frac{dy}{dx}$ complex wird. Sehen wir ab von den imaginären Werthen, die u und w erhalten können, oder nehmen wir vielmehr an, dass sie durch die ganze xy Ebene reell sind, so bedeckt also die Kurvenschaar den Theil der xy Ebene, in welchem w positiv ist, und in der Begrenzung dieses Theils wird, allgemein zu reden, w gleich Null sein. Diese Begrenzung der Kurvenschaar kann deren Enveloppe (im gewöhnlichen Sinne) sein, d. h. mit den sie berührenden Kurven die geometrische Tangente gemein haben. Wir wollen mit dem Namen Enveloppe oder Umhüllungslinie aber den weiteren Begriff jener Begrenzung bezeichnen, auch wenn die Begrenzung nicht von den begrenzten Kurven tangirt wird, den letzteren Fall nur durch die Bezeichnung »glatte Hülle« unterschieden. Da die Gleichung der Umhüllungslinie $w=0$ ist, so ist $\frac{\partial w}{\partial x} + u\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ die Bedingung dafür, dass die Umhüllungslinie von den umhüllten Kurven tangirt werde. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so fragt es sich, in welcher Weise die Kurvenschaar in der Enveloppe endigt. Da in der Enveloppe die geometrischen Tangenten $\frac{dy}{dx} = u + w^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{d_1 y}{d_1 x} = u - w^{\frac{1}{2}}$ gleich werden, so sieht man, dass die Enveloppe der Ort von Rückkehrpunkten der Kurvenschaar ist. Diese Rückkehrpunkte sind von der Art, dass die beiden in ihnen endigenden Kurvenzweige einander berühren. Sie bilden Spitzen von Rosenstachelform. Man kann sich leicht ein Bild eines solchen Kurvensystems verschaffen. Denkt man sich z. B. zu der Schaar der Tangenten eines Kreises die Schaar ihrer senkrechten Trajectorien construirt, so hat jede einzelne Trajectorie ihre Spitze im Kreise; d. h. sie trifft den Kreis unter senkrechter Incidenz und wird auch so reflectirt. Es stehen beiläufig öfters Kurvenschaaren mit andern in der Reciprocität, dass der Ort der Rückkehrpunkte der einen die glatte Umhüllungslinie der andern ist, und umgekehrt, eine Reciprocität, welche eines sehr allgemeinen Ausdrucks fähig

ist, wie wir dies schon bei den Oberflächen, die von zwei Parametern abhängen (§. 58), sahen. Wir wollen die Umhüllungslinie, wenn sie der Ort der Rückkehrpunkte der umhüllten Kurvenschaar ist, eine »raue« nennen.

Was nun die Contactcharakteristiken betrifft, so haben wir (§. 90):

$$N_{\pm} = \frac{1}{2\frac{\partial F}{\partial r}}\left\{\frac{\partial F}{\partial s} \pm \sqrt{W}\right\}$$

$$dy = N_{+} dx \qquad d_1 y = N_{-} d_1 x$$

$$dr + N_{-} ds + F_0' dx = 0 \qquad d_1 r + N_{+} d_1 s + F_0' d_1 x = 0$$

etc. etc.

$$dz = (p + N_{+} q)\, dx \qquad d_1 z = (p + N_{-} q)\, d_1 x$$

etc. etc.

In der beiden Schaaren gemeinschaftlichen Enveloppe ist $W=0$, und für $W=0$ wird $\frac{dy}{dx} = \frac{d_1 y}{d_1 x}$. Schreibt man N statt $N_{\pm}$ für $W=0$, und bezeichnet mit d_2 die Differentiale in der Richtung der Enveloppe, so würde eine glatte Enveloppe die Gleichungen haben:

$$W=0,\ d_2 W=0$$

$$d_2 y = N d_2 x$$

$$d_2 r + N d_2 s + F_0' d_2 x = 0$$

etc.

$$d_2 z = (p + Nq) d_2 x = 0$$

etc.

Dies ist ein vollständiges System, da den Differentialgleichungen der Charakteristiken nur eine Gleichung zur Vollständigkeit fehlt. Es ist das System der Differentialgleichungen der glatten Enveloppen. Allein wenn noch die Gleichung der Integraloberfläche hinzukömmt, so können wir nicht ohne Weiteres annehmen, dass die vorstehenden Gleichungen der Enveloppe der Charakteristiken angehören, dass, wenn längs der Enveloppe die Differentiation in der Richtung der Charakteristikenelemente mit d, die Differentiation in der Richtung der Enveloppe mit d_2 bezeichnet wird, $d_2 \equiv d$ sei. Es sei $f=0$ die Gleichung der Integraloberfläche, so kann man mit ihrer Hülfe

aus W die Differentialquotienten von z entfernen, wonach man dafür W_1 schreiben mag. Dann sind:

$$f=0, \quad W_1=0$$

die Gleichungen der Enveloppe der Contactcharakteristiken, gleichviel ob der glatten oder der rauhen. Wie in dem Falle, wo W nur von x, y, z abhing, ist jetzt wieder $W_1=0$ die Umgrenzungsfläche des Raumes der reellen Charakteristiken, welche aber von den willkürlichen Bestandtheilen von $f=0$ abhängt.

In erster Linie drängt sich die Frage auf, ob in Betreff der Umhüllungslinie der Charakteristiken nicht allgemeine Regeln existiren, ob z. B. nicht alle diese Umhüllungslinien glatt seien, etc. Bei der grossen Bedeutung dieser Frage für die Theorie, mit der wir uns hier beschäftigen, wäre deren Erledigung sehr erwünscht, allein wir müssen zu Gunsten noch dringenderer Fragen an dieser Stelle darauf verzichten, tiefer in den Gegenstand einzudringen.

§. 108.

Die Variation der Integraloberfläche als Folge der Variation der Grenzen.

Man denke sich eine Integraloberfläche einer Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ und die willkürliche Grenze, durch welche sie bestimmt wird, sei z. B. erstens ihre Schnittlinie K mit einer auf der xy Ebene senkrechten Ebene, und zweitens die Neigung, unter der die Integraloberfläche diese Ebene passirt. Stellen wir uns die Integraloberfläche variirt vor und zwar so, dass die erste und zweite Integraloberfläche eine Charakteristik gemein haben, so ist die Variation der Integraloberfläche sonst vollkommen willkürlich bis auf die der Grössen p, q, r, s, t in der gemeinsamen Charakteristik, wo δp, δq, δr, δs, δt verschwinden (§. 91). Mithin ist auch die Variation der Grenzkurve K bis auf die Variation der Tangente und des Krümmungshalbmessers der Grenzkurve im Punkt, wo sie von der gemeinsamen Charakteristik geschnitten wird, durchaus willkürlich. Lässt man die Grössen δr, δs, δt nicht verschwinden, sondern nur δp, δq, so ist die gemeinsame Kurve keine Charakteristik, verläuft ihr aber unendlich nahe, und

verschmilzt mit ihr, wenn die Variationen δr, δs, δt verschwinden (§. 101).

Wenn man ausserdem die Integraloberfläche so variirt, dass in der Durchschnittskurve der ursprünglichen und der variirten Oberfläche nicht allein δp und δq, sondern auch die Variationen aller Differentialquotienten bis zur $n-1$sten Ordnung *incl.* verschwinden, und man differenzirt die partielle Differentialgleichung im Ganzen $n-2$mal, darunter $m$mal nach y, so kommt (§. 50):

$$\overset{n}{\underset{m}{z}}\frac{\partial F}{\partial r} + \overset{n}{\underset{m+1}{z}}\frac{\partial F}{\partial s} + \overset{n}{\underset{m+2}{z}}\frac{\partial F}{\partial t} + F_m^{(n-2)} = 0.$$

Diese Gleichung, sowie die Gleichungen:

$$d\overset{n-1}{\underset{m}{z}} = \overset{n}{\underset{m}{z}}\,dx + \overset{n}{\underset{m+1}{z}}\,dy$$

$$d\overset{n-1}{\underset{m+1}{z}} = \overset{n}{\underset{m+1}{z}}\,dx + \overset{n}{\underset{m+2}{z}}\,dy$$

nach den $n$ten Differentialquotienten variirt, und die Variationen eliminirt, erhält man wieder die Differentialgleichung der Charakteristiken.

Man denke sich nun die Kurve K bis zu einem Punkt $\mathfrak{P}_1$ veränderlicher Gestalt, von $\mathfrak{P}_1$ ab aber fest, und nennen den festen Theil K_i, den veränderlichen K_a. Zur Bestimmung von p und q längs der Kurve K sei ihr parallel und unendlich nahe eine zweite K' gegeben, die ebenfalls durch einen $\mathfrak{P}_1$ unendlich nahen Punkt in einen variabeln Theil K_a' und einen festen K_i' getheilt wird. Variirt man nun vom Punkt $\mathfrak{P}_1$ an die Kurven K_a und K_a' dergestalt, dass K_i und K_i' in K_a und K_a' mit einer Stetigkeitsunterbrechung $n+1$ster Ordnung übergehen, so dass also im Punkt $\mathfrak{P}_1$ erst der $n$te Differentialquotient der Kurven K und K' eine Variation erfährt, so kann man nun drei Integraloberflächen unterscheiden: Erstens die durch K_i gehende, zweitens ihre Fortsetzung, die durch K_a geht. Diese beiden bilden die Oberfläche O, die von vorne herein gegeben war. Drittens die durch Variation von K_a erhaltene Oberfläche, welche mit O eine den Punkt $\mathfrak{P}_1$ passirende Charakteristik gemein hat. Man mag also den Theil K_a der Grenzkurve variiren, wie man will, sobald für den Punkt $\mathfrak{P}_1$ die Variationen von p, q, r, s, t verschwinden, ist jene Charakteristik die Grenze der festen

Oberfläche O_i, welche durch K_i geht, und der variabeln O_a, die durch K_a geht.

Bezeichnen wir das Winkelgebiet zwischen K_i und der Charakteristik C_1, die durch $\mathfrak{P}_1$ geht, mit $\angle\,(K_i, \mathfrak{P}_1, C_1)$, dessen Nebenwinkelgebiet aber mit $\angle\,(K_a, \mathfrak{P}_1, C_1)$, so führe ich noch als Ergebniss der Construction an, dass die Schnittlinie der variirten Oberfläche mit der Oberfläche O dann innerhalb des $\angle\,(K_a, \mathfrak{P}_1, C_1)$ fällt, wenn in $\mathfrak{P}_1$ δp und δq nicht verschwinden, in welchem Falle die Schnittlinie übrigens auch keine Charakteristik ist (§. 101).

§. 109.

Folgerungen aus dem Vorigen. Beziehung zwischen den beiden Schaaren der Charakteristiken.

Aus allen diesem geht hervor, dass die Charakteristik C_1 die Grenze ist, bis zu der die Oberfläche O durch K_i*) bestimmt ist, da eine Veränderung von K_a ihren Einfluss nicht über die die Grenze des Gebietes O_a erstreckt, nämlich nicht in den Winkelraum $\angle\,(K_i, \mathfrak{P}_1, C_1)$ hinein.

Nun wissen wir, dass durch den Punkt $\mathfrak{P}_1$ zwei Charakteristiken gehen, weil wir es mit einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu thun haben. Bezeichnen wir die die andere Charakteristik mit C_1', so steht sie in Bezug auf die vorliegende Betrachtung in folgender Beziehung zu C_1:

Denkt man sich K_a fest und K_i veränderlich, so erstreckt sich der Einfluss der Variation von K_i nicht über die Charakteristik C_1' hinaus in das Winkelgebiet $\angle\,(K_a, \mathfrak{P}_1, C_1')$, so dass dieses durch die Grenze K_a bestimmt wird. Daraus folgt aber wieder, dass die Gebiete $\angle\,(K_i, \mathfrak{P}_1, C_1)$ und $\angle\,(K_a, \mathfrak{P}_1, C_1')$ nicht übereinander fallen können, weil dies mit dem Früheren nicht stimmen würde, indem alsdann ein Theil von O, der sich in das Gebiet $\angle\,(K_i, \mathfrak{P}_1, C_1)$ erstreckte, auch dem Einflusse von K_a unterläge.

---

*) Ich bemerke, dass wenn ich hier in der Folge von der Grenze K oder von einer Kurve K, welche die Integraloberfläche bestimmt, rede, dies der Kürze halber geschieht und damit selbstverständlich immer die Doppelkurve, aus zwei einander unendlich nahe verlaufenden Kurven bestehend, gemeint ist, wie sie zur Bestimmung der Integraloberfläche als ausreichend erkannt wurde.

Wenn wir also die eine feste Spitze eines Zirkels in $\mathfrak{P}_1$ einsetzen, die andere bewegliche in einen Punkt von K_i, der nahe an $\mathfrak{P}_1$ liegt, und den Zirkel nun so drehen, dass die bewegliche Spitze, auf O gleitend, schliesslich in K_a anlangt, so wird sie, bevor sie K_a erreicht, erst C_1 und dann C_1' passiren.

§. 110.

Die vollständige Begrenzung des durch ein Stück einläufiger Grenzbedingung bestimmten Stückes Integraloberfläche.

Wir werden nunmehr übersehen können, wie das Gebiet begrenzt ist, innerhalb dessen ein Grenzkurvenstück die Integraloberfläche bestimmt.

Denken wir uns nämlich noch einen Punkt $\mathfrak{P}_2$ auf der Kurve K und zwar in dem Theil, der K_i genannt wurde, und bezeichnen jetzt das zwischen den Punkten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ liegende Stück durch K_i; und die ausserhalb K_i liegenden Theile der Kurve K, jenachdem sie an $\mathfrak{P}_1$ oder $\mathfrak{P}_2$ grenzen, mit K_a und K_a'; die Charakteristiken, welche $\mathfrak{P}_1$ passiren, mit C_1 und C_1', diejenigen, welche $\mathfrak{P}_2$ passiren, mit C_2 und C_2', so dass C_1', C_1, C_2', C_2 in der Richtung $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ die Reihenfolge der Charakteristiken ist: dann bestimmt die Kurve K, von $\mathfrak{P}_1$ an nach K_a' zu genommen, das Winkelgebiet $\angle(K_i + K_a', \mathfrak{P}_1, C_1)$, und da eine Variation von K_a' ihren Einfluss nur bis C_2' erstreckt, so haben wir hiermit die vollständige Begrenzung des durch K_i allein bestimmten Gebietes.

Die Begrenzung besteht einerseits aus dem Kurvenstück K_i, andererseits aus den beiden Charakteristiken C_1 und C_2'. Diese schneiden sich in einem auf O liegenden Punkte $\mathfrak{P}$. Daher liegt das von K_i bestimmte Gebiet innerhalb eines Kurvendreiecks, und die Charakteristiken C_1 und C_2' sind dessen spontane Grenzen. Ich werde dieses Gebiet fortan mit Δ_i bezeichnen, denn es empfiehlt sich wohl, dafür eine consequent durchzuführende Bezeichnung festzusetzen, da es in der Theorie der einläufigen Grenzbestimmung häufig zur Sprache kommen wird.

Bemerkung I. Denkt man sich auf dem Grenzstück K_i zwischen den Punkten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei Punkte Π_1 und Π_2 be-

weglich, so bestimmen diese beiden Punkte in jeder relativen Lage die Spitze Π eines neuen Integraldreiecks Δ_i, dessen Basis die Grenze zwischen Π_1 und Π_2 ist. Nehmen nun Π_1 und Π_2 nacheinander alle möglichen relativen Lagen zwischen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ an, so wandelt der Punkt Π im Dreieck Δ_i mit der Basis K_i umher und nimmt dort alle möglichen Lagen an. Er beschreibt also die Integraloberfläche Δ_i mit der Basis K_i. Diese Betrachtung führt beiläufig zu der Ansicht, dass für die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung deren beide Charakteristikenschaaren das naturgemässe Coordinatensystem sind. Auch besteht ja die Reduction der linearen Differentialgleichungen (§. 95) in nichts anderem als in der Einführung dieses natürlichen Coordinatensystems.

Bemerkung II. Wegen dieser neuen Eigenschaft der Charakteristiken, spontane Grenzen zu sein, habe ich bereits an einer früheren Stelle dieser Schrift partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegeben, deren Charakteristiken geometrische Eigenthümlichkeiten besitzen, welche nun an Interesse gewinnen. So sind z. B. die spontanen Grenzen der Integraloberflächen der Gleichung (§. 63)

$$r - \frac{1+p^2}{pq} s + \psi(x, y, z, p, q) \left\{ \frac{1+q^2}{pq} s - t \right\} = 0$$

allemal Krümmungslinien dieser Oberflächen, u. s. f.

§. 111.

Gleichniss zur Beleuchtung des Früheren.

Es sei mir gestattet, die so eben entwickelten Vorstellungen durch einen Vergleich zu lebhafterer Anschauung zu bringen.

Denken wir uns die Grenze K aus einem Paar von ihrer ganzen Länge nach in Berührung stehenden (etwa zusammengelötheten) Dräthen bestehend, denen eine beliebige Krümmung ertheilt ist. Die Dräthe sollen ferner in Glasfluss getaucht sein, worauf man das Glas von ihnen in einer Fläche abgezogen haben mag, jedoch so, dass die beiden Dräthe in der Glasfläche liegen, deren Grenze sie somit vorstellen.

Nun stelle man sich die Dräthe gleichzeitig in einer gewissen Länge K_i eingespannt vor, so dass eine gleichviel wie be-

schaffene Biegung der Dräthe ausserhalb der eingespannten Stelle auf die Form dieser von gar keinem Einfluss sein kann.

Biegt man jetzt das Dräthepaar an der einen Seite von K_i, so entspricht diese Biegung der Variation von K_a, und zwar auch insofern, als sie, wenigstens zwischen gewissen Grenzen, an der Uebergangsstelle von dem losen in den eingespannten Drath die Grössen p und q der Glasfläche nicht berührt. Man muss sich nun denken, das Glas sei nicht elastisch, sondern beinahe absolut spröde, so dass eine sehr kleine und nicht erst eine merkliche Biegung der Dräthe eine Spaltung der Glasfläche zur Folge hat.

Dann wird bei einer kleinen Formveränderung des Drathpaares, vom einen Endpunkt von K_i beginnend, ein Sprung durch die Glasfläche gehen, und dieser Sprung wird das Gebiet des Glases, dessen Gestalt wesentlich von K_i abhängt, von dem ausserhalb gelegenen trennen. Bei den Integraloberflächen der partiellen Differentialgleichungen ist dieser Sprung der ältern Monge'schen Definition gemäss eine Charakteristik. Eine Biegung des Draths an der andern Seite von K_i wird dann einen zweiten Sprung veranlassen, und wenn beide Sprünge sich treffen (was im Allgemeinen der Fall sein wird), so schneiden sie das an der Drathstelle K_i haftende dreieckige Stück Δ_i der Glasfläche aus.

§. 112.

Einfache und doppelte Bestimmung eines Stücks Integraloberfläche und die Fortsetzung der Grenzdiscontinuitäten in das Innere der Integraloberfläche.

Es folgen aus den obigen Betrachtungen noch einige, wie ich glaube, nützliche Bemerkungen. Theilt man nämlich die Kurve K durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ in einen Theil K_1 und den daranstossenden K_2, nennt C und C' die den Punkt $\mathfrak{P}$ passirenden Charakteristiken, und setzt fest, dass C am nächsten K_1 ist, so bestimmt K_1 für sich das Winkelgebiet $\angle(K_1, \mathfrak{P}, C)$ und K_2 für sich das Winkelgebiet $\angle(K_2, \mathfrak{P}, C')$. Das Gebiet $\angle(C, \mathfrak{P}, C')$ wird weder von K_1 noch K_2 allein bestimmt, sondern beide Theile dienen gleichzeitig zu seiner Bestimmung.

Es seien z. B. K_1 und K_2 zwei Kurvenstücke von endlichem, aber ganz verschiedenem analytischen Gesetz, die im

Punkt 𝔓 mit einer Unstetigkeit dritter oder höherer Ordnung an einander stossen: dann bestimmt die Kurve K in ihrer Gesammtheit die Integraloberfläche so, dass der Theil $L(K_1, 𝔓, C)$ nur von dem Gesetz K_1, der Theil $L(K_2, 𝔓, C')$ nur von dem Gesetz K_2 abhängt, in $L(C, 𝔓, C')$ dagegen beide Gesetze sich mischen.

Da nun die drei Gebiete $L(K_1, 𝔓, C)$, $L(C, 𝔓, C')$, $L(C', 𝔓, K_2)$ von drei verschiedenen Gesetzen abhängen, so werden auch in ihren Begrenzungen Unstetigkeiten stattfinden. Daraus folgt, dass eine Unstetigkeit in der Grenze sich in die Integraloberfläche nach zwei Richtungen fortpflanzt, nämlich im Sinne der beiden den Unstetigkeitspunkt passirenden Charakteristiken. So wird sich, glaube ich, eine Unstetigkeit von der gehörigen Ordnung in der Grenze einer Integraloberfläche einer partiellen Differentialgleichung $n$ter Ordnung nach n Richtungen in die Integraloberfläche fortpflanzen*). Um auch hierauf unser Gleichniss vom vorigen § anzupassen, wäre anzunehmen, dass die Discontinuität vom Endpunkte von K_i sich in die Glasfläche fortpflanze, und dass die Glasfläche eine Discontinuität von einer gewissen Ordnung an nicht vertragen könne, so dass ein Sprung entstehe.

Die bestimmende Kraft von K_1 und K_2 auf $(C, 𝔓, C')$ vermitteln die Charakteristiken C und C'. Daher bestimmen diese für sich das Gebiet $(C, 𝔓, C')$. Es könnte sich freilich fragen (S. 217 Anm.), ob, wenn nur die Charakteristiken ohne weitere Bedingung gegeben wären, das von ihnen eingeschlossene Gebiet ebenfalls bestimmt sein würde, oder ob zu diesem Behuf längs der Charakteristiken noch irgend eine Bedingung zu erfüllen sei. Diese könnte aber nur die dritten und höheren partiellen Differentialquotienten von z betreffen, da die ersten und zweiten längs der Charakteristiken bestimmt sind, und es ist wohl höchst unwahrscheinlich und liegt nicht in der Natur der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, dass gerade eine solche Bedingung erforderlich sei: weshalb ich nicht be-

*) Bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und denjenigen $n$ter Ordnung, bei welchen die Differentialgleichung der Charakteristiken, (§. 93) nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, n gleiche Wurzeln hat, giebt es dem Texte gemäss nur eine Fortpflanzungsrichtung für die Discontinuitäten.

zweifele, dass zwei sich schneidende Charakteristiken C und C' das Gebiet $(C, \mathfrak{P}, C')$ bestimmen, wiewohl ich vor der Hand keine besseren Gründe dafür habe, als die angeführten.

§. 113.

Ueber die Form des Integrals der partiellen Differentialgleichungen.

Endlich dient diese Betrachtung noch dazu, um über die Form des Integrals der partiellen Differentialgleichungen einigen Aufschluss zu erhalten.

Da nämlich die Portion K_i der Grenze das dreieckige Stück Δ_i der Integraloberfläche O bestimmt, als dessen Basis wir K_i, und als dessen Spitze wir den Durchschnittspunkt $\mathfrak{P}$ der Charakteristiken C_1 und C_2' ansehen wollen, so übersehen wir leicht, dass die Coordinaten der Spitze $\mathfrak{P}$ als Funktionen des Stücks K_i der Kurve K, welches die $\mathfrak{P}$ passirenden Charakteristiken ausschneiden, von den Coordinaten aller Punkte dieses ausgeschnittenen Kurvenstücks abhängen: dergestalt, dass die Variation irgend einer Portion des Kurvenstücks K_i im Allgemeinen eine Variation der Coordinaten von $\mathfrak{P}$ bedingt.

Betrachtet man nun die Coordinaten von $\mathfrak{P}$ als die laufenden der Integraloberfläche, so sind alle früheren Ausführungen über die spontanen Grenzen, u. s. w. in dem einen Grundsatz enthalten, dass diese Coordinaten Funktionen aller Punkte von K innerhalb der $\mathfrak{P}$ passirenden Charakteristiken, dagegen von den Punkten ausserhalb durchaus unabhängig sind.

Nennen wir wieder $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ die Schnittpunkte von C_1 und C_2' mit K, und bezeichnen mit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}_1}(K)$ eine Funktion aller Punkte von K zwischen $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ und mit x, y, z die Coordinaten von $\mathfrak{P}$, so hat also das Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung die Form:

$$z = \mathfrak{S}_{\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}_1}(K)$$

und die Coordinaten von $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ wären daraus mit Hülfe der ähnlichen Gleichungen:

$$x = \mathfrak{S}_{1\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}_1}(K)$$

$$y = \mathfrak{S}_{2\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}_1}(K)$$

zu eliminiren.

Bezeichnen wir ferner mit δ_a die Variation von K ausserhalb der Punkte $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, mit δ_i eine Variation von K zwischen diesen Punkten, so genügt das Integral den Gleichungen:

$$\delta_a z = 0$$
$$\delta_i z = \delta_i(z) + p\delta_i x + q\delta_i y.$$

Die Bezeichnung $\delta(z)$ ist §. 4 erklärt.

Noch einige Fälle sind zu erwähnen. Ist erstens N_+ von z und dessen Differentialquotienten frei, so wird:

$$\delta_i z = \delta_i(z) + (p + N_+ q)\delta_i x$$

und sind N_+ und N_- gleichzeitig davon frei, so ist:

$$\delta_i z = \delta_i(z).$$

Ueber die Form der Funktion $\mathfrak{S}$ ist es kaum möglich, mehr zu sagen, als dass sie vermuthlich ein Integral einer von der Grenzbedingung abhängigen Funktion sein wird, worauf Riemann's im letzten § zur Sprache kommende Integration hindeutet.

Was die Differentialgleichungen höherer Ordnungen betrifft, so scheint mir das ganze Raisonnement der vorhergehenden §§ fast ohne Modification auf sie erweitert werden zu können. Zwar habe ich in der bisherigen Schlussfolgerung einige Lücken ausfüllen müssen durch Anführung der Ergebnisse der Construction, die sich nur mit den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschäftigt hat: ich glaube indessen es für unzweifelhaft erachten zu dürfen, dass die Integrale aller partiellen Differentialgleichungen eine der obigen ähnliche Form annehmen. Nur wird man bei einer partiellen Differentialgleichung $n$ter Ordnung zu untersuchen haben, welche zwei von den n Charakteristiken, die den Punkt $\mathfrak{P}$ passiren, das Stück K_i begrenzen.

§. 114.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, bei denen $N_+ = N_-$ ist.

Schliesslich ist noch der Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu gedenken, bei denen $N_+ = N_-$ ist.

Nimmt man das Stück K_i als fest an, und stellt sich vor, die allgemeine Differentialgleichung (bei der N_+ nicht gleich N_- ist) gehe allmählig in die Form ($N_+ = N_-$) über, so rückt der Punkt $\mathfrak{P}$ (die Spitze von Δ_i) ins Unbegrenzte fort, während sowohl die Charakteristiken C_1 und C_1', wie C_2 und C_2' sich nähern und zusammenfallen. Bei dieser Näherung mögen die aus C_1 und C_1' und aus C_2 und C_2' entstandenen zwei Charakteristiken mit C_1 und C_2' bezeichnet werden. Hier bestimmt demnach K_i ein Stück Integraloberfläche, welches, ganz wie dies bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung geschieht, eingeschlossen ist zwischen den beiden Charakteristiken C_1 und C_2', die sich nicht schneiden können, ausser in Grenzfällen (wie die Integralcônoide). Daraus würde folgen, dass die Form der ganzen Charakteristik C_1 keine Aenderung erfahren kann, wenn wir ein an C_2' angrenzendes Stück von K_i variiren. Indem wir nun dieses variirte Stück gegen C_0 zu wachsen lassen, können wir das nicht variirte Stück auf ein Minimum beschränken, es unendlich klein werden lassen.

§. 115.

Die spontanen Grenzen bei den zweiläufigen Grenzbedingungen.

Diese seien unter der Form zweier in endlicher Entfernung von einander befindlichen Kurven gegeben, welche die Integraloberfläche gleichzeitig zu passiren hat. Um der Vorstellung einen Anhalt zu verschaffen, denken wir uns in der xy Ebene der x Axe parallel zwei gerade Linien K und $\mathfrak{K}$. Zu K construiren wir eine unendlich nahe Grenzkurve K', welche zur Bestimmung von p und q dienen soll. Nun nehmen wir auf K und K' das Stück K_i mit K_i' an, wodurch Δ_i bestimmt wird. Die Lage der Spitze $\mathfrak{P}$ von Δ_i wird mit der Lage und Länge von K_i und dem Gesetz von K_i' variiren. Sie wird nicht nur einen Raum beschreiben, sondern sie wird für continuirliche Folgen von Werthesystemen jener variabelen Elemente an einem Punkt des Raumes verweilen können.

Man denke sich zuerst das Gesetz von K' fest, und Lage und Länge von K_i so bestimmt, dass $\mathfrak{P}$ in die zweite Gerade $\mathfrak{K}$ fällt, was im Allgemeinen möglich sein wird, weil die Linien K und K' eine Fläche bestimmen, die einen Punkt $\mathfrak{P}$ mit

$\mathfrak{K}$ gemein haben kann. Jede Variation von K' wird eine Verschiebung von $\mathfrak{P}$ zur Folge haben.

Es ist nun anzunehmen, das Gesetz von K' könne so eingerichtet werden, dass während man Länge und Lage von K_i so variirt, dass Punkt $\mathfrak{P}$ die Linie K nicht verlässt, die beiden Δ_i begrenzenden Charakteristiken eine Integraloberfläche beschreiben.

Was die analytische Bedeutung dieser Betrachtung anbelangt, so wird $\mathfrak{P}$ bei jeder Verschiebung von K_i nothwendig die Linie $\mathfrak{K}$ verlassen, wenn die durch K und K' bestimmte Integraloberfläche nicht durch $\mathfrak{K}$ hindurchgeht. Für das Gesetz K' entsteht also bei der differentialen Verschiebung von K_i eine Differentialbedingung, wenn $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{K}$ bleiben soll. Diese Bedingung wird die Form einer Differenzengleichung annehmen, da sie darin besteht, die Variation der Grenzen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in:

$$z = \mathfrak{S}_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2}(K, K'), \quad x = \text{etc.}, \quad y = \text{etc.}$$

durch die bekannten Variationen von x, y, z in der Linie $\mathfrak{K}$ auszudrücken und das Gesetz K' demgemäss zu bestimmen. Hat man diese Bestimmung ausgeführt, so beschreibt Δ_i bei der Verschiebung von K_i in seinen successiven Lagen ein Stück Integraloberfläche.

Es mögen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Endpunkte von K_i, der beweglichen Basis von Δ_i, sein. Die Verschiebung von K_i geschieht im Sinne $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2$, und zwar so, dass im Beginn der Verschiebung $\mathfrak{P}_1$ im Punkt $(\mathfrak{P}_1)$, am Ende $\mathfrak{P}_2$ im Punkt $(\mathfrak{P}_2)$ liegt. Bei dieser Verschiebung mag $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{K}$ den Weg $\overline{\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}''}$ zurücklegen. Die Begrenzung des so eben construirten Stückes Integraloberfläche wird somit: 1) und 2) die Geraden $\overline{(\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)}$ und $\overline{\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}''}$; 3) und 4) die Charakteristiken $\overline{(\mathfrak{P}_1)\mathfrak{P}'}$ und $\overline{(\mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}''}$.

Die hier angedeutete Construction ersetzt die willkürliche Kurve K' durch $\mathfrak{K}$.

Um ein Beispiel hiervon zu geben, sei eine Integraloberfläche der Gleichung $s = \varphi(x, y, z, p, q)$ durch einen im positiven Quadranten der xy Ebene gelegenen Kreis zu legen. Die xy Projectionen der Charakteristiken der Gleichung $s = \varphi$ sind der x und der y Axe parallel. Die vier der x und der y Axe parallelen Tangenten mögen den Kreis in den Punkten π_1, π_2,

π_3, π_4 berühren, und es sei π_1 der x Axe, π_2 der y Axe am nächsten gelegen. Wir construiren nun das Stück Δ_i auf einem Halbkreis K_i, dessen Endpunkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, der erstere zwischen π_1 und π_4, der zweite zwischen π_2 und π_3 liegen. Dann liegt die Spitze $\mathfrak{P}$ von Δ_i zwischen π_3 und π_4. Bewegt man nun den Halbkreis K_i so, dass der Punkt $\mathfrak{P}_1$ anfänglich in π_4 liegt und der Punkt $\mathfrak{P}_2$ schliesslich in π_3 zu liegen kommt, so beschreibt $\mathfrak{P}$ den Quadranten $\pi_4 \pi_3$, und der Ort der successiven Lagen von Δ_i ist die durch den Kreis zu legende Integraloberfläche. Bei dieser Construction entspricht das Stück $\pi_4 \pi_1 \pi_2 \pi_3$ dem Stücke $(\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)$ der allgemeinen Construction, und das Stück $\pi_4 \pi_3$ dem Stück $\mathfrak{P}' \mathfrak{P}''$. Beide Stücke stossen aneinander, wie dies bei geschlossenen Kurven, durch welche eine Integraloberfläche zu legen ist, stets der Fall sein muss. Gleichzeitig bemerken wir auch, dass in Grenzfällen die eine spontane Grenze von Δ_i sich auf Null zusammenziehen kann; in welchem Fall die Integraloberfläche ein Kurvenzweieck bildet, wie das von dem Halbkreis $\pi_2 \pi_1 \pi_4$ und der Charakteristik $\overline{\pi_2 \pi_4}$ eingeschlossene.

Bezeichnen wir gegenwärtig das Stück $\overline{(\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)}$ durch (K_i), construiren dazu das Δ_i, dessen Basis (K_i) ist, und nennen es (Δ_i), so geht (Δ_i) durch $\mathfrak{K}$ hindurch, und wir erkennen, dass in diesem Falle (Δ_i) bestimmt wird durch die beiden Stücke (K_i) oder $\overline{(\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)}$ und $\mathfrak{K}_i$ oder $\overline{\mathfrak{P}' \mathfrak{P}''}$. So können wir, wenn irgend ein Δ_i gegeben ist, die bestimmende Basis K_i und K_i' stets ersetzen durch K_i und ein beliebiges auf Δ_i befindliches Kurvenstück $\mathfrak{K}_i$, welches aber die spontanen Grenzen schneiden muss.

Wir hätten dies Raisonnement auch so anstellen können, dass wir sagten, von der Grenze $\mathfrak{P}' \mathfrak{P}''$ an ist die Integraloberfläche weiter zu construiren, indem man ihr unendlich nahe auf der zuerst construirten Integraloberfläche eine zweite unendlich nahe Kurve $\mathfrak{K}'$ nimmt, und $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ als neue Grenze auffasst. Allein, und ich bemerke dies hier ausdrücklich, man kann bei den partiellen Differentialgleichungen nicht über jede Kurve hinaus die Integraloberflächen weiter construiren. Wir haben dies bei den Grenzcharakteristiken der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (§. 65) schon gesehen, und bei den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, bei

denen $\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - 4\,\frac{\partial F}{\partial r}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}$ wesentlich negativ ist, scheint dieser Umstand eine grosse Rolle zu spielen. Die Möglichkeit der Construction muss also immer erst nachgewiesen werden. Bei den Differentialgleichungen, bei welchen jene Grösse wesentlich positiv ist, geht aus dem Obigen hervor, dass die Grenzen der Integraloberfläche stets Charakteristiken sind, woraus man schliessen darf, dass bei ihnen jede Kurve nach zwei Seiten hin zum Ausgang der Construction dienen kann*).

Bei denjenigen Differentialgleichungen, welche Räumeportionen mit imaginären Charakteristiken zulassen, ist es vorläufig nicht zu entscheiden, was geschieht, wenn die für eine Grenze K_i construirte Integraloberfläche die Grenzoberfläche $W_1 = 0$ (§. 107) erreicht. Es wird gerade dann die Frage zu erörtern sein, ob die Charakteristiken in einer glatten oder in einer rauhen Umhüllungslinie endigen. Ausser den Enveloppen, deren Gleichung $W=0$ ist, können die Contactcharakteristiken deren noch andere haben, welche aber nicht für beide Schaaren gleichzeitig Umhüllungslinien sein können. Will man sich nun bei Beurtheilung des Verhaltens der Integraloberflächen in den Contactcharakteristiken nach den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung richten, so wäre zuvörderst anzunehmen, dass alle diese Enveloppen Rückkehrkanten, also ebenfalls Grenzen für die Construction sind. Es sind dies jedoch nur Muthmassungen.

Ich begnüge mich mit diesen Andeutungen, denn wir streifen hier an Fragen zu schwieriger Natur, um durch dergleichen allgemeine Betrachtungen erledigt werden zu können. Ich sehe für die genauere Untersuchung aller dieser Dinge überhaupt keinen anderen Weg, als die synthetische Construction, und zwar ist die geometrische, weil übersichtlicher, wohl der analytischen vorzuziehen.

---

*) Bei dieser Gelegenheit werde ich noch einen im Früheren übergangenen Punkt zur Sprache bringen. Das durch eine Grenze K_i bestimmte Stück Integraloberfläche ist eigentlich nicht dreieckig, sondern viereckig. Denn man wird die Integraloberfläche offenbar nach der einen Seite von K_i so gut wie nach der anderen hin construiren können. So werden im obigen Beispiele der Kreis, und die Neigung, unter der die Integraloberfläche ihn trifft, noch vier Stücken Integraloberfläche bestimmen, deren Projectionen zwischen dem Kreise und den Tangenten an π_1, π_2, π_3, π_4 liegen.

Bezüglich der zweiläufigen Grenzbedingungen noch eine Frage. Legt man eine Integraloberfläche durch eine einfache Kurve *K*, lässt diese Kurve fest, und variirt die Integraloberfläche, so schneiden sich die so entstehenden Integraloberflächen alle in der Kurve *K*. Aber sie können sich ausserdem auch in anderen Kurven schneiden, und können Umhüllungsflächen haben. Sind diese osculatorisch, so sind sie Integraloberflächen. Man denke sich in endlicher Entfernung von *K* eine Ebene und auf dieser eine Kurvenschaar mit osculatorischer Umhüllungslinie. Legt man durch *K* und alle Individuen der Kurvenschaar Integraloberflächen, so geht deren Umhüllungsfläche durch die Umhüllungslinie der Kurvenschaar. Legt man aber durch *K* und diese Umhüllungslinie eine Integraloberfläche, so fragt es sich; Ist diese mit jener Umhüllungsfläche identisch?

Was sich hier über die Form des Integrals der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergab, und was zu dessen Interpretation beigebracht wurde, ist gewiss herzlich wenig, wo es sich nun um die wirkliche Integration einer solchen partiellen Differentialgleichung handelt. Allein wir sind uns bei der ferneren Untersuchung unserer Ziele doch klar bewusst, und brauchen nicht mehr im Dunkeln umherzutappen.

§. 116.

Ueber die Integration der reinlineären partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Eine sehr willkommene Bestätigung der in diesem Capitel mitgetheilten Resultate ist uns durch Riemann's*) Integration der Schalldifferentialgleichung geboten. Ich halte diese Integration für den wichtigsten Fortschritt, den die Theorie der partiellen Differentialgleichungen seit Monge, Lagrange und Fourier gemacht hat. Sie beruht auf einer geschickten Anwendung der Green'schen Methode, und führt zu einer Auflösung von der im vorigen § besprochenen Form.

Zum Schluss des gegenwärtigen Kapitels werde ich unter

*) *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen*, bes. Abdr. S. 18 u. ff.

Beibehaltung unserer Nomenklatur und Bezeichnungsweise die Darstellung jener Integrationsmethode folgen lassen, so weit deren theoretische Ergebnisse auf die Ausführungen dieses Capitels Bezug haben.

Betrachten wir ohne Weiteres die reducirte (§. 95) »reinlineäre«*) Differentialgleichung:

$$F \equiv s + up + vq + wz + U = 0,$$

wo u, v, w, U Funktionen von nur x und y vorstellen.

F ist eine Grösse, die im ganzen Gebiet der xy Werthe verschwindet, und ebenso wird das Produkt ζF, wo ζ eine noch zu bestimmende Funktion von x und y vorstellt, im ganzen Gebiet der xy Werthe verschwinden, wenigstens überall, wo ζ nicht unendlich wird. Es wird also auch eine Summe von Elementen von der Form: $\zeta F dE$, über ein Stück E der xy Ebene genommen, Null sein. Das über E ausgedehnte Flächenintegral:

$$\mathrm{S}\,\zeta F dE$$

transformirt nun Riemann durch partielle Integration, und verfügt dabei unter zweckmässiger Wahl der Grenzen von E über ζ dergestalt, dass unter den Integralzeichen nur noch bekannte Werthe von z und seinen Differentialquotienten an der Grenze vorkommen. Da bei dieser Transformation z auch ausserhalb der Integralzeichen vorkommt, und zwar für einen Punkt der Integraloberfläche, der nicht in der Grenze liegt, so hat man auf diese Weise die Auffindung von z abhängig gemacht von der Ermittelung zon ζ. Dann ist ζ das Integral einer anderen reinlineären partiellen Differentialgleichung $\Phi = 0$, die schon an sich leichter als $F=0$ zu behandeln scheint. Wichtig ist aber der Umstand, dass die Grenzbedingungen, welche zur Bestimmung von ζ dienen, unabhängig sind von den Grenzbedingungen für z. Man kennt mithin, gleichviel ob wir die Differentialgleichung $\Phi = 0$ auflösen können oder nicht, nunmehr die Art, wie die willkürlichen Funktionen in das Integral von $F=0$ ein-

*) Monge nannte lineär die partiellen Differentialgleichungen, welche in Bezug auf die höchsten darin vorkommenden Differentialquotienten lineär sind. Daher kann man die Differentialgleichung: $s + up + vq + wz + U = 0$, wo u, v, w, U nur x und y enthalten, reinlineär nennen.

gehen, und dies scheint mir deshalb das theoretisch bedeutungsvolle Ergebniss des RIEMANN'schen Calcüls zu sein, weil es die Möglichkeit eröffnet, mit dem Integral von $F=0$ zu rechnen, auch in den Fällen, wo man über seinen vollständigen Ausdruck nicht gebietet.

Wir wollen jetzt die Grösse $\mathsf{S}\,\zeta F dE$ in der angegebenen Weise transformiren. Durch partielle Integration zerfällt sie erstens in ein anderes Flächenintegral:

$$\mathsf{S}\,(z\Phi+\zeta U)dE$$

und dann in ein über die Begrenzung von E zu nehmendes einfaches Integral:

$$\int\left(G\frac{dx}{ds}+H\frac{dy}{ds}\right)ds,$$

wo ds ein Element der Begrenzungskurve bedeutet.

Was zunächst die Flächensumme S betrifft, so ist:

$$\Phi\equiv\sigma-\frac{\partial\zeta u}{\partial x}-\frac{\partial\zeta v}{\partial y}+w\zeta,$$

wenn man, wo es zweckmässig erscheint, die partiellen Differentialquotienten von ζ nach x und y mit $\pi, \varkappa, \varrho, \sigma, \tau$ bezeichnet.

Das einfache Integral lautet:

$$\int\left[z(\pi-v\zeta)\frac{dx}{ds}+\zeta(q+uz)\frac{dy}{ds}\right]ds \;\ldots\ldots\quad \text{I.}$$

oder

$$-\int\left[\zeta(p+vz)\frac{dx}{ds}+z(\varkappa-u\zeta)\frac{dy}{ds}\right]ds. \;\ldots\ldots\quad \text{II.}$$

Die Summationsrichtung auf der Begrenzungskurve ist dabei gewählt wie folgt. Denkt man sich das Flächenstück E in dem positiven Quadranten der xy Ebene gelegen, so findet die Summation für ein im Punkt $x=0$, $y=0$ befindliches Auge in dem ihm zugekehrten Theil der Begrenzungskurve von links nach rechts statt.

Bezüglich der einfachen Integrale können wir gleich eine Bemerkung machen: Die Grössen unter den Integralzeichen müssen vollständige Differentiale sein, wenn wir für einen Augenblick $U=0$ annehmen und über ζ so verfügen, dass $\Phi=0$ wird. Dann verschwindet nämlich das Flächenintegral und das

Begrenzungsintegral, jedes für sich, und da das letztere über eine vor der Hand ganz willkürliche geschlossene Kurve zu nehmen ist, so muss die längs dieser Kurve zu summirende Funktion ein vollständiges Differential sein; ein Raisonnement, welches meines Wissens zuerst CLAIRAUT in seinem schönen Buche *sur la Figure de la Terre* angestellt hat, wo er die hydrostatische Grundgleichung damit ableitet, wenn ich nicht irre, vor Entdeckung der Variationsrechnung.

Die Vortheile der Transformation beruhen nun auf der zweckmässigen Wahl des Gebietes E, innerhalb dessen die Summe $S\zeta F dE$ genommen ist: Wir bestimmen dazu die xy Projection eines Stücks Δ_i (§. 110) Integraloberfläche der Gleichung $F=0$ und nennen diese Projection $P(\Delta_i)$. Die Projectionen der Charakteristiken der Gleichung $F=0$ sind die beiden Schaaren von Geraden, für die y und für die x constant ist. Also ist die Begrenzung von $P(\Delta_i)$ folgendermaassen beschaffen. Die drei Ecken von $P(\Delta_i)$ bezeichnen wir 1) mit $\mathfrak{P}$ oder (x, y), 2) mit $\mathfrak{P}_1$ oder (x_1, y), 3) mit $\mathfrak{P}_2$ oder (x, y_2), und es sei $x > x_1$, $y > y_2$. Verbunden sind: $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ durch die Charakteristik $y = constans$; $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_2$ durch die Charakteristik $x = constans$; $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch das willkürliche Kurvenstück K_i. Die einfachen Integrale sind dann in der Richtung $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ genommen.

Betrachten wir nun zunächst die Form I des Begrenzungsintegrals. Sie wird:

$$\int_{\mathfrak{P}}^{\mathfrak{P}_1} z(\pi - v\zeta)\,dx + \int_{\mathfrak{P}_2}^{\mathfrak{P}} \zeta(q+uz)\,dy + \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \left[z(\pi - v\zeta)\frac{dx}{ds} + \zeta(q+uz)\frac{dy}{ds}\right] ds,$$

wo nun ds ein Element der Kurve K_i bedeutet. Da z und seine Differentialquotienten längs K_i als bekannt vorauszusetzen sind, so enthält dies einfache Integral dann keine Unbekannte in Bezug auf z mehr, wenn z in den längs der Charakteristiken zu nehmenden Integralen nicht mehr vorkömmt. Um z daraus durch geeignete Verfügung über ζ beseitigen zu können, integriren wir ζq partiell, wodurch das Integral zwischen $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}$ wird:

$$[\zeta z]_{\mathfrak{P}} - [\zeta z]_{\mathfrak{P}_2} - \int_{\mathfrak{P}_2}^{\mathfrak{P}} z(\varkappa - u\zeta)dy,$$

und hiermit ist die Transformation von $\mathbf{S}\zeta F dE$ vollendet.

Nun liegt es auf der Hand, wie ζ bestimmt werden muss, damit man für den Punkt $\mathfrak{P}$ z durch seine und seiner Differentialquotienten Grenzwerthe ausgedrückt erhalte. Es muss ζ die Differentialgleichung

$$\Phi = 0$$

und die Grenzbedingungen:

$$\pi - \zeta v = 0: \text{ längs der Char: } y = constans$$
$$\varkappa - \zeta u = 0: \text{ längs der Char: } x = constans$$

erfüllen. Da nun diese Grenzbedingungen Differentialgleichungen sind, welche bei ihrer Integration die vollständigen Gleichungen der Charakteristiken $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2$ geben, so bestimmt sich die eine Integrationsconstante durch die Bedingung, dass beide Charakteristiken sich schneiden. Zur Bestimmung der anderen Constanten ist es am zweckmässigsten, ζ für den Punkt $\mathfrak{P}$ gleich Eins zu setzen, denn dann ergiebt die Transformation von $\mathbf{S}\zeta F dE$ endlich:

$$z = [\zeta z]_{\mathfrak{P}_2} - \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \left[z(\pi - v\zeta)\frac{dx}{ds} + \zeta(q + uz)\frac{dy}{ds} \right] ds - \mathbf{S}\zeta U dE,$$

wenn wir schlechtweg mit z den Werth dieser Variabeln für den Punkt $\mathfrak{P}$ bezeichnen. An der rechten Seite vorstehender Gleichung kommt gegenwärtig, ζ als bekannt vorausgesetzt, nichts Unbekanntes in Bezug auf z mehr vor.

Daher ist nun wirklich die Bestimmung von z auf diejenige einer Funktion ζ zurückgeführt, welche neben der Gleichung $\Phi = 0$ nur solche Grenzbedingungen zu erfüllen hat, die von der Beschaffenheit der Kurve K_i, also von den für z gegebenen Grenzbedingungen bis auf die Lage der Spitze $\mathfrak{P}$ von $P(\Delta_i)$ unabhängig sind, und das Integral der Gleichung $F = 0$ hat die im §. 113 geforderte Form.

Führt man die nämliche Transformation auf Grund der Form II des Begrenzungsintegrals durch, so findet man: